Exercice. Bac Amérique du Nord 2024. Sujet 1 — 5 points

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\, \mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. (a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
   $I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n$ et $I_n = \dfrac{1}{n} J_n$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$.
5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1   from math import *
2   def seuil() :
3       n = 0
4       I = 2
5       ...
6           n=n+1
7           I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8   return n
```