

Exercice. Bac Polynésie 2024.

4 points

1. Calculons $\mathbb{P}(E \cap B)$.

$\mathbb{P}(E)$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cap B) &= \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(B) \\ &= 0,6 \times 0,75\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E \cap B) = 0,45.$$

2. Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$\{E, \bar{E}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(\bar{E} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(B) + \mathbb{P}(\bar{E}) \times \mathbb{P}_{\bar{E}}(B) \\ &= 0,60 \times 0,75 + 0,4 \times 0,52\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(B) = 0,658.$$

3. Calculons $\mathbb{P}_B(E)$.

Puisque $\mathbb{P}(E) \neq 0$, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B(E) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap E)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{0,45}{0,658} \\ &\approx 0,6838905775075987\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_B(E) \approx 0,6839.$$

4. (a) Choisir un acheteur est une épreuve de Bernoulli de succès « l'acheteur peut installer une borne » de paramètre $p = 0,658$. On répète à l'identique et de façon indépendante 20 fois cette épreuve donc on a un schéma de Bernoulli. X comptant le nombre de succès de ce schéma

$$X \mapsto \mathcal{B}(20; 0,658).$$

- (b) Calculons $\mathbb{P}(X = 8)$.

$X \mapsto \mathcal{B}(20; 0,658)$ donc

$$\mathcal{P}(X = 8) = \binom{20}{8} 0,658^8 \times (1 - 0,658)^{20-8}$$

$$\mathbb{P}(X = 8) \approx 0,0113$$

- (c) Calculons $\mathbb{P}(X \geq 10)$.

$$\mathbb{P}(X \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(X < 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 9)$$

$$\mathbb{P}(X \geq 10) \approx 0,9548.$$

- (d) Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$X \rightarrow \mathcal{B}(20; 0,658)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= np \\ &= 20 \times 0,658\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X) = 13,16.$$

- (e) Il faut prévoir d'engager $1200 \times 13,16 = 15792$.

Exercice. Métropole juin 2008.

4 points

1. (a) Calculons F' .

$h : x \mapsto x \ln(x)$ est de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. Puisque u et v sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* , uv est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f' = u'v + uv'$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$, quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}h'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1\end{aligned}$$

on en déduit finalement

$$F'(x) = \ln(x).$$

Calculons I .

$$\begin{aligned}I &= \int_1^e \ln(x) \, dx \\ &= [x \ln(x) - x]_1^e \\ &= e \ln(e) - e - (1 \ln(1) - 1)\end{aligned}$$

$$I = 1.$$

- (b) Exprimons J en fonction de I .

Posons $u'(x) = 1$ et $v(x) = (\ln(x))^2$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2 \ln(x)}{x}$.

u' et v' étant continues on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
 J &= \int_1^e u'(t)v(t) dt \\
 &= [u(t)v(t)]_1^e - \int_1^e u(t)v'(t) dt \\
 &= [t(\ln(t))^2]_1^e - \int_1^e t \times \frac{2\ln(t)}{t} dt \\
 &= e(\ln(e))^2 - 1(\ln(1))^2 - 2 \int_1^e \ln(t) dt \\
 &= e - 2I
 \end{aligned}$$

$$J = e - 2I.$$

(c)

$$\begin{aligned}
 J &= e - I \\
 &= e - 1
 \end{aligned}$$

$$J = e - 1.$$

(d) Calculons \mathcal{A} .

Si $x \in [1, e]$ alors $\ln(x) \in [\ln(1), \ln(e)]$ par croissance de \ln et donc de $\ln(x) \leq 1$ on déduit $(\ln(x))^2 \leq \ln(x)$. Nous en déduisons l'aire recherchée :

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(t) - g(t) dt$$

Par linéarité :

$$\mathcal{A} = J - I$$

$$\mathcal{A} = e - 2.$$

2. $M(x, f(x))$ et $N(x, g(x))$. $MN = \sqrt{x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(f(x) - g(x))^2} = f(x) - g(x)$ car $f(x) \geq g(x)$. Notons $d(x) = f(x) - g(x) = \ln(x) - (\ln(x))^2$. $d'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1-2\ln(x)}{x}$. Sur $[1, e]$, $d'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$. $f(x) - g(x) = -\ln(2)^2 + \ln(2)$

La distance maximale est atteinte pour $x = e^{\frac{1}{2}}$ et cette distance est $\frac{1}{4}$.

Exercice. Asie juin 1997

6 points

Partie A.

1. $\frac{\ln(x)}{x^2} = \ln(x) \times \frac{1}{x^2}$ or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc par produit : $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty$. Par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Par conséquent \mathcal{C}_1 admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

$$2. f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

| | | | |
|--------|---|-------------------|-----------|
| x | 0 | $e^{\frac{1}{2}}$ | $+\infty$ |
| f_1' | | + | - |
| f_1 | | $-\infty$ | 0 |

3. $f_1'(1) = 1$ et $f_1(1) = 0$ donc $y = x - 1$ est l'équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse $x_0 = 1$.

4. $\frac{(\ln(x))^2}{x^2} = (\ln(x))^2 \times \frac{1}{x^2}$ or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x))^2 = +\infty$ donc par produit : $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = +\infty$. Par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et par conséquent C_2 admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

$$5. f_2'(x) = \frac{\frac{2}{x} \ln(x) \times x^2 - (\ln(x))^2 \times 2x}{x^4} = 2 \frac{\ln(x)(1 - \ln(x))}{x^3}$$

| | | | | |
|--------|---|-----------|---|-----------|
| x | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
| f_2' | | - | + | - |
| f_2 | | $+\infty$ | 0 | e^{-2} |

Partie B.

$$1. F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x)) \times 1}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}. I_1 = \int_1^e f_1(x) dx = [-F(x)]_1^e = -\frac{1 + \ln(e)}{e} + \frac{1 + \ln(1)}{1} = 1 - \frac{2}{e}.$$

$$2. I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x} (\ln(x))^n \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x} \times (n+1) \frac{1}{x} (\ln(x))^n dx = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

$$3. I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = 2 - \frac{5}{e}. f_1 - f_2 = \frac{\ln(x)(1 - \ln(x))}{x^2} > 0 \text{ sur } [1, e] \text{ donc } \mathcal{A} = I_1 - I_2 = \frac{3}{e} - 1.$$

Partie C.

1. Initialisation question B1 et pour l'hérédité :

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n \\
 &= -\frac{1}{e} + (n+1)n! \left(1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right) \\
 &= (n+1)! \left(-\frac{1}{e(n+1)!} + 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right) \\
 &= (n+1)! \left(1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right) \right)
 \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right)$.

2. $0 \leq \ln(x) \leq 1$ sur $[1, e]$. La fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0; 1]$ donc $0 \leq (\ln(x))^n \leq 1$.
Comme $\frac{1}{x^2} > 0$ (pour $x \in [1, e]$) : $0 \leq \frac{(\ln(x))^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. En intégrant, par croissance de l'intégrale : $\int_1^e 0 \, dx \leq I_n \leq \int_1^e \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{e} \leq 1$.
3. D'après la question précédente : $0 \leq \frac{1}{n!} I_n \leq \frac{1}{n!}$ et donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$.

On en déduit avec le résultat de la question C1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$. Et par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} = e$.