Exercice. Bac Polynésie 2024. 4 points

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

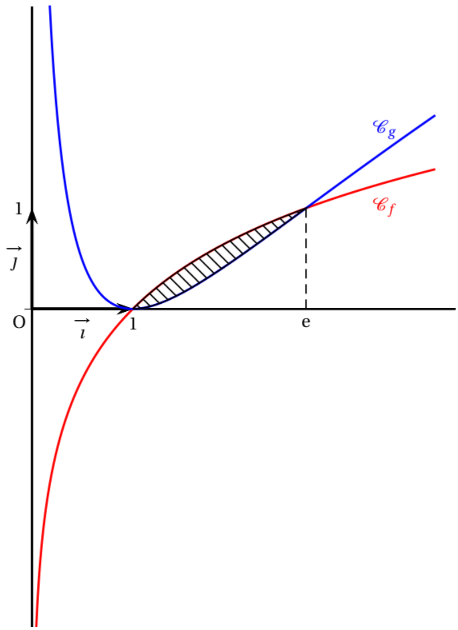
Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. *On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.*
2. Démontrer que $P(B) = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
   (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Calculer $P(X = 8)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
   (d) Calculer l'espérance de X.
   (e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €. En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Exercice. Métropole juin 2008. 4 points

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée. On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.
   (c) En déduire J.
   (d) Donner la valeur de $\mathcal{A}$.
2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice. Asie juin 1997 — 6 points

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère.

Partie A.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_1(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_1$?

2. Étudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$, à la courbe $\mathcal{C}_1$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_2$?
5. Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau des variations de f_2.

Partie B.

n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On pose $F(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que : $I_{n+1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$.
3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Partie C.

1. En utilisant la question 2. de la partie B, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

2. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, montrer que, pour tout n entier naturel non nul : $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.