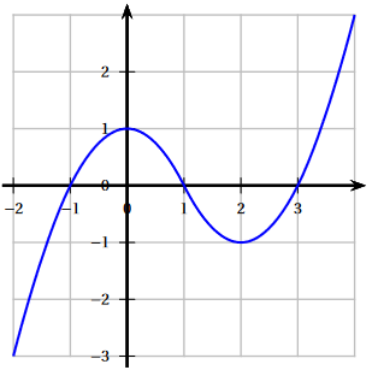
Travail noté (20 minutes).

Exercice 1. 6/6,5

1. On donne ci-dessus la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2;4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a) f est décroissante sur $[0;2]$.
b) f est décroissante sur $[-1;0]$.
c) f admet un maximum en 1 sur $[0;2]$.
d) f admet un maximum en 3 sur $[2;4]$.

2. On considère la suite (a_n) ainsi définie : $a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}$. Pour tout entier naturel n, on a :

a) $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
b) $a_n = -\frac{2}{3^n} + 4$.
c) $a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
d) $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$.

3. f' la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = xe^{x^2+1}$ est la dérivée de la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2+1}$.
b) $f(x) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2+1}$.
c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$.
d) $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$.

4. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation

a) $x = -2x$;
b) $y = -1$;
c) $y = -2$;
d) $y = 0$.

5. On considère la suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :
$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2 - \frac{n}{n+1}$. On peut affirmer que la suite (u_n) :

a) converge vers 2.
b) converge vers 1.
c) diverge vers $+\infty$.
d) n'a pas de limite.

6. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par : $a_n = \dfrac{1-3^n}{1+2^n}$. La limite de la suite (a_n) est égale à

   a) $-\infty$ b) -1 c) 1 d) $+\infty$

Exercice 2. 0,5/6,5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = n + \sqrt{n^2+3n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifiez que pour tout entier n : $u_n \geqslant 2n$.
2. Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. 0,5/6,5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \end{cases}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Démontrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que $\lim\limits_{n+\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.