Travail noté (30 minutes).

Exercice 1. 14/43

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - \frac{2}{3^n}$.
2. Déduisez-en la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 2. 10/43

Déterminez les fonctions dérivées des fonctions : $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{(\cos(x)+1)^7}$.

Exercice 3. 6/43

Déterminez les limites de suites dont on donne le terme général :

$$u_n = \left(\frac{4}{n^5} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)\left(\frac{-1}{n^3} - \frac{3}{n^{12}} + \frac{1}{n^2+1} + 3 - n^2\right),$$

$$v_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^4 + n^3 - n^2 + 8} \text{ et } w_n = \frac{n^6 - 5n^2 - 1}{3n^2 - 5n^6 - 1}.$$

Exercice 4. 11/43

Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On note X la variable aléatoire qui à un lancé associe le nombre affiché.

Si le numéro obtenu lors du lancer est inférieur ou égale à 7 on perd 3 €. Si le numéro obtenu est compris, au sens large, entre 8 et 18 on gagne 1 €. Dans les autres cas on gagne 5 €. On note Y la variable aléatoire qui à un lancer associe la somme gagnée ou perdue.

1. Donnez sans justification la loi suivie par Y.
2. Déterminez l'espérance de Y.
3. Donnez sans justification la loi suivie par X.
4. Déterminez l'espérance et la variance de X.
5. On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois le dé et on note Z_n la variable aléatoire indiquant la somme des nombres obtenus lors des n lancers. Déterminez l'espérance de Z_n.

Exercice 5. 3/43

Exercice extrait du Concours Général. Essayez juste de comprendre comment calculer les premiers termes des deux suites ce sera déjà très bien.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier k tel que $\frac{n}{2^k}$ soit un entier.

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ puis, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0 \\ 1 + 2v(n) - \frac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

1. Donner la valeur des entiers $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
2. Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.
3. Calculer les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et vérifier que $u_8 = 4$.

4. Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.
5. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.
6. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.