Travail noté (30 minutes).

Exercice 1. 23/48

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$. Dressez le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n \leqslant u_{n+1} < 1$.
   (b) Déduisez-en la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. 20/48

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes sans vous préoccuper du domaine de dérivabilité.

a) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

b) $g : x \mapsto (\mathrm{e}^x + x^3)^4$.

c) $h : x \mapsto \dfrac{1}{2x^{13}+3x^4}$.

d) $k : x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$.

Exercice 3. 5/48

Bac 1981. On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $v_1 = 1$ et, pour tout n, élément de $\mathbb{N} \setminus \{0;1\}$: $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$.

1. Trouvez deux réels a et b tels que, pour tout n, élément de $\mathbb{N} \setminus \{0;1\}$: $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n}$.
2. Montrer que la suite u est croissante, que, pour tout n élément de $\mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $u_n \leqslant v_n$, et enfin, que la suite u est majorée.
3. Concluez.