Suites divergentes, limite infinie.

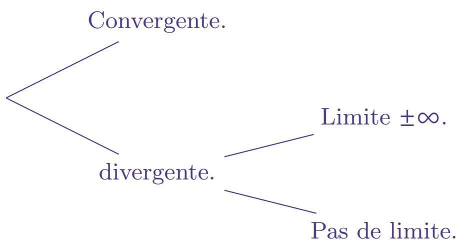
Nous allons nous intéresser à un cas particulier de suite divergente : lorsque la suite prend des valeurs infiniment grandes ou infiniment petites.

Définition.

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***admet pour limite*** $+\infty$ (ou qu'elle *tend vers* $+\infty$) si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Nous avons également une définition de limite égale à $-\infty$. Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $-\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
2. On utilise le même terme limite mais la suite n'est pas pour autant convergente. La suite convergente se rapproche d'une valeur finie.
3. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes qui soient plus petits.
4. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est un cas particulier de suite divergente. Voici un schéma qui résume les possibilités lors de l'étude de la convergence d'une suite.



Exemples.

1. Démontrons que la suite définie par $u_n = 3n$ tend vers $+\infty$.
   Soit $A \in \mathbb{R}$.
   Notons $N = \lfloor \frac{A}{3} \rfloor + 1$.
   Si $n \geqslant N$ alors $n \geqslant \lfloor \frac{A}{3} \rfloor + 1$ donc $3n \geqslant \lfloor \frac{A}{3} \rfloor + 1 > A$. Autrement dit $3n \in]A;+\infty[$. À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]A,+\infty[$.
   Quelque soit le réel A l'intervalle $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit :

   $$\boxed{(3n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

Suite des entiers.

Proposition 1. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Démonstration. C'est une tautologie.

EXERCICE 1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1} \end{array}\right.$..

1. Calculez u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturez une expression explicite de u_n, pour n entier supérieur à 1.

3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Suite des racines carrées.

Proposition 2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Unicité de la limite.

Proposition 3. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\geqslant p}$, ℓ_1 et ℓ_2 des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (donc des réels ou des infinis). Si ℓ_1 et ℓ_2 sont des limites de $(u_n)_{n\geqslant p}$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

Suite bornée.

Proposition 4. Une suite admettant une limite infinie n'est pas bornée.
Démonstration. Par l'absurde.

Opérations sur les limites finies et infinies.

Proposition 5. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite convergeant vers une réel ℓ_1 et et $(v_n)_{n\geqslant q}$ admettant pour limite $+\infty$.

(i) $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
(ii) Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha u_n = +\infty$.
(iii) Si $\alpha < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha u_n = -\infty$.
(iv) Si $\ell_1 > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
(v) Si $\ell_1 < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$.
(vi) Si (u_n) ne s'annule pas et si $\ell_1 > 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = +\infty$.
(vii) Si (u_n) ne s'annule pas et si $\ell_1 < 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = -\infty$.
(viii) Si (v_n) ne s'annule pas alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Remarques.

1. La plupart de ces résultats relèvent du bon sens (« si ce nombre devient très grand et que je le multiplie par ... »). Ce qui est plus important c'est de bien connaître notre incompétence, ce qu'on appelle les formes indéterminées :
   (i) Si $\ell_1 = 0$ alors $u_n v_n =?$.
   (ii) Si (u_n) ne s'annule pas et si $\ell_1 = 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} =?$.
2. Il y a des résultats semblables pour la limite $-\infty$.

Exemples.

1. La suite de terme général $n + \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$.
2. La suite de terme général $\frac{2}{3}\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.
3. La suite de terme général $-\sqrt{n}$ tend vers $-\infty$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) n = +\infty$.
5. $\lim_{n\to+\infty} \left(-5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) n = -\infty$.
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{5+\frac{1}{n^2}} = +\infty$.
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\sqrt{n}}{-7+\frac{1}{n^3}} = -\infty$.

8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{n} = 0$.
9. $\frac{1}{n^2} \times n^3$ conduit à une forme indéterminée (une simplification algébrique suffit pour lever l'indétermination).

EXERCICE 2. Calculez les limites des suites suivantes.

a) $\frac{4n+3}{2+\frac{1}{n}}$. b) $\frac{-2n}{1+\frac{1}{n^2}}$. c) $(8+\sqrt{n})\left(-1+\frac{1}{n}\right)$.

d) $\frac{4}{\sqrt{n}+2}$. e) $\frac{\frac{1}{n}}{3-n}$. f) $n^{14} + \frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

EXERCICE 3. Déterminez dans chaque cas la limite de la suite dont le terme général est donné (en levant éventuellement l'indétermination).

a) $n^4 \times \frac{1}{n^{12}}$. b) $n^4 \times \frac{1}{n^2}$. c) $\frac{1}{4n^2} \times n^2$.

Opérations sur les limites infinies.

Proposition 6. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(v_n)_{n\geqslant q}$. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $-\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.

Remarques.
1. Par contre la somme de suites tendant vers des infinis opposés conduit à des formes indéterminées.

Proposition 7. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite tendant vers un infini et $(v_n)_{n\geqslant q}$ une suite tendant vers un infini. $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$ si (u_n) et (v_n) ont des limites de même signe, sinon $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

Remarques.
1. Par contre $\frac{u_n}{v_n}$ correspond à des formes indéterminées.

Exemples.
1. $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty} n \times (-3\sqrt{n}) = -\infty$.

Proposition 8. Soit $m \in \mathbb{N}$. $\lim_{n\to+\infty} n^m = +\infty$.

Lever une indétermination : factoriser par la plus grande puissance de n.

Nous avons déjà évoqué cette astuce qui consiste factoriser par la fonction dominante en terme de croissance pour faire apparaître des croissances comparées. On l'utilise pour des divisions d'infinis ou des sommes d'infinis de signe opposé.

Cette astuce est notamment mise en œuvre avec des expressions polynomiales ou des fractions rationnelles.

Exemples.
1. Si $u_n = n^3 - n$ alors *a priori* c'est une forme indéterminée. Factorisons par n^3 : $u_n = n^3\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Avec cette expression il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{3n+7}$ correspond à une forme indéterminée, mais, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur : $u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{7}{n} = 3$ donc (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

EXERCICE 4. Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \frac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \frac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \frac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \frac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\frac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \frac{3}{n}\left(\frac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \frac{3}{1-2n} - \frac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \frac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \frac{1}{n^2+1}$.

m) $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1 - \sqrt{n})$.

Lever une indétermination : limite inverse en zéro.

Proposition 9. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite dont tous les termes sont non nuls. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si, quelque soit $n \geqslant p$, $u_n > 0$ (respectivement $u_n < 0$) alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$).

Exemples.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}} = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} = 0$ et $\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}} > 0$ pour $n > 0$.

Remarques.

1. Il existe une notation pour signifier que la suite est à termes et tend vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. De même si la suite tend vers 0 par valeurs négatives on notera : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^-$.

Comparaison de limites.

Proposition 10. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ et $(v_n)_{n \geqslant q}$ deux suites. Si, à partir d'un certain rang, quel que soit n, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Remarques.

1. On a un résultat semblable pour une suite majorée par une suite tendant vers $-\infty$.

EXERCICE 5. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Montrez que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.
2. Déduisez-en la limite de (u_n).

Exemples.

1. Nous l'utiliserons dans la démonstration de la limite d'une suite géométrique (confer infra).

Théorème de la limite monotone.

Proposition 11. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geqslant p}$. Si $(u_n)_{n \geqslant p}$ est croissante (respectivement décroissante) et non majorée (resp. non minorée) alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Suites géométriques-exponentielles.

Proposition 12. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

(i) Si $q \in \{0; 1\}$ alors $(q^n)_{n \geqslant p}$ est convergente.

(ii) Si $q \in]1, +\infty[$ alors $q^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si $q \in]0; 1[$ alors $q^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.

(i) Si $q = 0$ alors (q^n) est la suite nulle qui converge vers 0. Si $q = 1$ alors (q^n) est la suite constante égale à 1 qui converge vers 1.

(ii) Nous avons vu l'inégalité de Bernoulli : $\forall (x,n) \in]-1, +\infty[\times \mathbb{N}$, $(x+1)^n \geqslant 1 + nx$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q > 1$. Pour $x = q - 1$: $q^n = ((q-1)+1)^n \geqslant 1 + n(q-1)$. Or $q - 1 > 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} 1 + n(q-1) = +\infty$ puis par comparaison des limites : $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

(iii) Si $q \in]0; 1[$ alors $\frac{1}{q} > 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} q^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = 0$.

Exemples.

1. $\lim_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$.
2. $\lim_{x \to +\infty} 2^n = +\infty$.
3. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Remarques.

1. Nous avons vu qu'une suite géométrique est définie par une formule de récurrence mais nous savons aussi qu'elle est donnée par une formule explicite : $u_n = u_p q^{n-p}$. C'est à cause de cette dernière expression que la proposition peut être considéré comme décrivant toutes les suites de raison positive.

EXERCICE 6. Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que pour tout entier naturel n $4 - 0{,}9^n \leqslant u_n \leqslant 4 + 0{,}1^n$.

Proposition 13. $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$.

Lever une indétermination : croissance comparée.

Proposition 14.

(i) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^m} = 0$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

(iii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^m}{q^n} = 0$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $q > 1$.

(iv) $\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ avec $q > 1$.

Remarques.

1. Ce résultat permet de lever des indéterminations du type infini diviser par infini.
2. Cette proposition se mémorise en y voyant une échelle de croissance de plus en plus forte vers $+\infty$. La croissance vers $+\infty$ de $(\ln(n))$ est négligeable par rapport à celle $(\sqrt(n))$. Celle de $(\sqrt(n))$ est négligeable devant celle (n^m). Et cetera.
3. Par transitivité (ou produit des termes généraux) on remarque, par exemple, que $(\ln(n))$ est négligeable par rapport à (q^n).
4. Cette comparaison se fait via des quotients et pour utiliser cette proposition il faudra souvent factoriser dans les expressions que nous utiliserons.

Exemples.

1. $\lim_{n \to +\infty} 0{,}5^n n^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

2. $0{,}5^n(n^2+n-1) = 0{,}5^n n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0$.

EXERCICE 7. Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.

b) n^2-6^n.

c) $\sqrt{n^{-1}}+n!$.

d) $2^{-n}+\sqrt{n}$.

e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.

f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$.

h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.

i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.

k) $\dfrac{n^{-3}}{\sqrt{n}}$.

l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0{,}5^n\sqrt{n}$.

n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$.

o) $\dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

Exercices.

EXERCICE 8. Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$;

d) $u_n = \dfrac{1}{n}+3^n$;

e) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^3}$;

f) $u_n = \dfrac{1}{6^n}$.

g) $u_n = 0{,}5^n+\sqrt{n}$.

h) $u_n = -n^3-2n^2$.

i) $u_n = n^2+4n+1$.

j) $u_n = 1+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+n^3$.

k) $u_n = n+(-1)^n+1$;

l) $u_n = n^2-\sin(n)+1$;

m) $u_n = \sin\left(\sqrt{\cos\left(n^2-n^n\right)}\right)-n-1$.

n) $u_n = n!+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

o) $u_n = n!+\sqrt{n}$.

p) $u_n = \left(\dfrac{99}{100}\right)^n\sin(n)$.

q) $u_n = n^2+2n+(-1)^n n$.

r) $u_n = 5-\dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 9. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$: $u_n = 1+\frac{1}{n+(-1)^n}$.

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n\geqslant 2$ on a : $\frac{1}{n+1}\leqslant u_n-1\leqslant\frac{1}{n-1}$.
2. Déterminez les limites des suites de termes généraux : $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n-1}$.
3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 10. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n+2n+3$.

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0,\ldots,u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.

3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 11. Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.
b) $4^n - 7$.
c) $n^3 + \dfrac{0{,}1^n}{\sqrt{n}}$.
d) $\dfrac{1}{n} + 4$.
e) $n^{-4} + \sqrt{n}$.
f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}$.
g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}$.
h) $\dfrac{\sqrt{n}}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.
i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}$.
j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.
k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.
l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)$.
m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.
n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.
o) $4n^2 - n + 1$.
p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.
q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}$.

EXERCICE 12. Déterminez les limites en levant l'indétermination.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.
b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.
c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.
d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.
e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.
f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.
g) $u_n = n^2 - 3n$.
h) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.
i) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.
j) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.
k) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.
l) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.
m) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.
n) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.
o) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.
p) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.
q) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

EXERCICE 13. Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée. La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location. On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B. D'après une étude statistique :

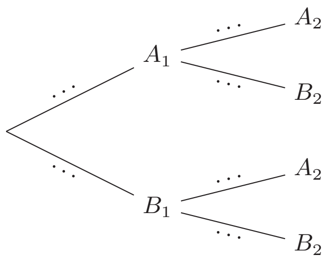
- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B. On considère un vélo de la société pris au hasard. Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

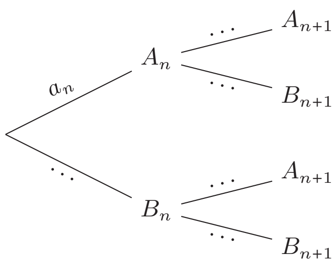
- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



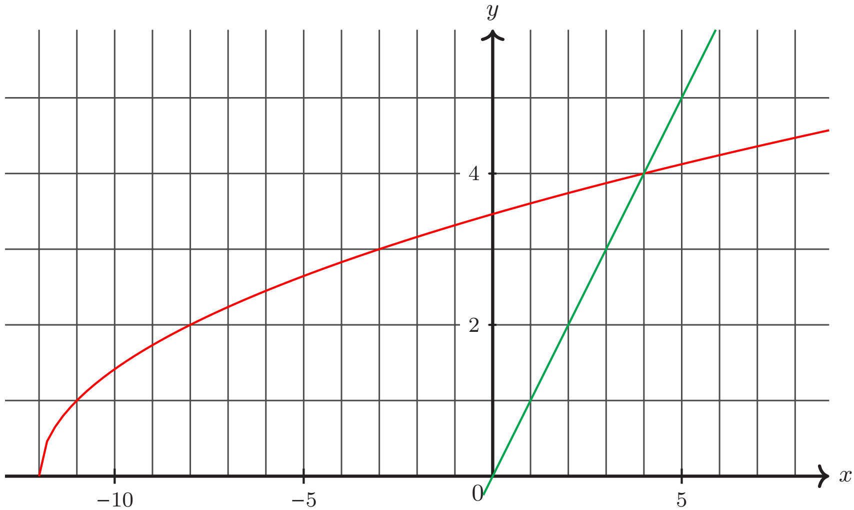
2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 14. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4)$.
   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}$.
4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

EXERCICE 15. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 1{,}4v_n - 0{,}05v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$.
   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).
   (c) Conjecturez son comportement.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$.
3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $f(x) - 8 = -0{,}05(x-20)(x-8)$.
   (a) Pour tout entier naturel n : $8 - v_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times (8 - v_n)$.
   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n : $8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n$.
   (c) Concluez.

EXERCICE 16. Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

EXERCICE 17. Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays. Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille. À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement. On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n : $p_{n+1} = 1{,}018p_n + 16$.
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = p_n - l$ soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?
6. Au bout de combien d'années la population va-t-elle tripler, par rapport à celle de 1969 ?

EXERCICE 18. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors : $u_n \geqslant 0$.
4. Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors : $u_n \geqslant n - 3$.
5. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 19. Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$;
. la suite (S_n) pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).
2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).
   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.
   (c) Déterminez la imite de la suite (S_n).

Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.

Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

EXERCICE 20. Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et, pour tout entie
$0{,}955T_n + 0{,}9$.

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).
   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0{,}955^n$.
   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).
   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.
   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.
   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.
   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 21.

- Centres étrangers groupe 2 sujet 1 21 mars 2023. Arbre probabiliste, suites, limites.
- Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009