Suites convergentes.

Définitions et vocabulaire.

Suite des inverses.

Suite inverse de racine carrée.

Unicité de la limite.

Suite bornée.

Opérations sur les limites.

EXERCICE 1. Calculez la limite de la suite dont on donne un terme général dans chaque cas.

a) $\frac{1}{n} + 4$.
b) $\frac{3}{n} - 13$.
c) $\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^2}$.
d) $\frac{1}{\sqrt{n}n^2}$.
e) $\frac{1}{13n^2}$.
f) $1 + \frac{-6}{7n^8}$.
g) $\frac{8-\frac{1}{n^2}}{-6}$.
h) $\frac{1}{n^3}\left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$.
i) $\frac{-6+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}{7-\frac{1}{n}}$.

EXERCICE 2. Vérifiez que la suite dont on donne le terme général correspond (a priori) à un forme indéterminée de limite puis levez l'indétermination (en factorisant par la plus grande puissance de n au numérateur et au dénominateur ou tout autre procédé permettant de retrouver des limites connues) et en déterminant la limite.

a) $\frac{n^3}{n^9}$.
b) $\frac{\sqrt{n}}{n}$.
c) $\frac{n^2-6\sqrt{n}+7}{-5n^2+n\sqrt{n}}$.
d) $\frac{n^2+6n+3}{n^3-5n-12}$.
e) $\frac{3n^4-n+1}{5n^4+4n^3+n^2+3}$.
f) $\frac{-7n^2+n-12}{n^7}$.

Comparaison de limites.

EXERCICE 3. Démontrez que $\left(\frac{(-1)^n}{n^7}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et précisez sa limite.

EXERCICE 4. Démontrez que $\left(\frac{\sin(n^2+1)}{n^4}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et précisez sa limite.

Théorème de la limite monotone.

EXERCICE 5. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donnez un minorant de la limite.

EXERCICE 6. Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Déduisez-en que (u_n) converge.

Exercices.

EXERCICE 7. Étudiez la monotonie de la suite définie par : $u_0 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$.
EXERCICE 8. Étudiez la monotonie de la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 - 10n$.
EXERCICE 9. Calculez quelques termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Que dire de sa monotonie ?
EXERCICE 10. Étudiez le sens de variation de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2n-3}{n+2}$.
EXERCICE 11. Étudiez le sens de variation de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n - 1$.
EXERCICE 12. On définie les suites $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $v_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, $x_n = 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et $y_n = 2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminez les limites des différentes suites.
2. En remarquant que $x_n = u_n + v_n$ et $y_n = u_n v_n$ expliquez la propriété que nous avons vérifiée sur ce cas particulier.

EXERCICE 13. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \in [0;2] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$.

1. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$.
2. Calculez $u_{n+1} - u_n$ et montrez que la suite (u_n) est croissante (utilisez la quantité conjuguée).
3. Montrez que (u_n) est convergente.

EXERCICE 14. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$.

1. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
2. Étudiez le signe de $u_{n+1} - u_n$. Que pouvez-vous en déduire,

EXERCICE 15. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez. Pour établir la majoration on établira ; pour tout entier $k > 1$: $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

EXERCICE 16. Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

EXERCICE 17. On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$.

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
3. Qu'en conclure ?
4. Soit $\varepsilon > 0$. Écrivez un algorithme qui renvoie une valeur approchée à ε près de la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 18. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+2n} + \frac{n}{n^2+2n+1}$.

1. De combien de termes u_n est-il la somme ? Écrivez et calculez u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{2n}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2(n+1)}{n}$.
3. Montrez que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?