Suites convergentes.

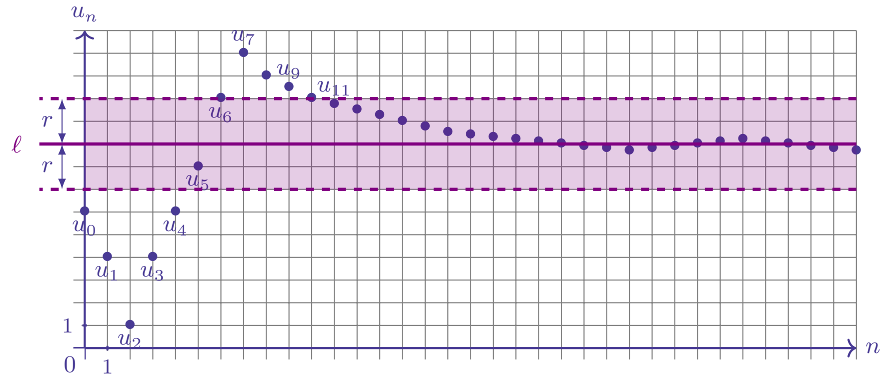
Nous nous intéressons aux suites dont les valeurs semblent se stabiliser lorsque n augmente.

Définitions et vocabulaire.

Définition 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Nous dirons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si et seulement si : quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, il contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

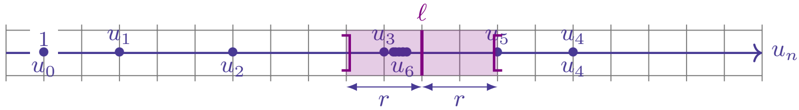
Remarques.

1. Lorsqu'une suite converge vers un réel ℓ nous dirons que *la suite converge* ou que *la suite est convergente* sans préciser la limite.
2. En cas de convergence nous dirons que ℓ est une *limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et nous noterons : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. Lorsqu'une suite ne converge pas on dit qu'*elle diverge* ou qu'*elle est divergente.*
4. Lorsque nous serons confronté à une suite dont nous ne savons dire si elle converge ou diverge nous dirons que nous avons à faire à *une forme indéterminée* (c'est une dénomination spécifique au lycée).
5. Autrement dit si on délimite une petite zone autour de ℓ (en fait n'importe qu'elle zone) tous les points de la suite hormis un nombre fini d'entre eux sont dans cette zone.
6. La convergence est une propriété à l'infini qui ne dépend pas des premiers termes. Donc si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ alors $(u_n)_{n\geqslant 7}$ converge aussi vers ℓ.
7. Les intervalles ouverts doivent être imaginés comme des ensembles de plus en plus petit autour de ℓ. Aussi petit soit l'intervalle ouvert contenant ℓ il contiendra tous les termes de la suite hormis quelques uns (un nombre fini en tout cas). Il y a un aspect dynamique dans cette définition : on peut se rapprocher autant qu'on le veut de ℓ, ça ne change rien.
8. Les intervalles doivent être ouverts car, sauf si la suite est stationnaire, la valeur limite n'est pas atteinte, et donc l'intervalle fermé $[\ell;\ell]$ qui contient ℓ ne contient, en général, aucun terme de la suite.
9. Le plus souvent dans les démonstrations nous travaillerons avec des intervalles ouverts centrés sur la limite ℓ et de rayon r : $]\ell-r,\ell+r[$. Mais ceci ne change rien à la généralité des résultats.
10. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule explicite.



À partir de u_{11} les termes de la suite sont tous dans l'intervalle ouvert $]\ell - r, \ell + r[$.

11. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule de récurrence.



12. Cette définition est un outil (assez théorique c'est vrai) pour démontrer qu'une suite est convergente. Nous en verrons d'autres dans cette leçon.
13. Remarquons que la limite éventuelle d'une suite devra être conjecturée (merci la calculatrice).
14. C'est comme si la suite était infiniment bornée à l'infini.

Exemples.

1. Les suites constantes convergent et leurs limites sont leurs valeurs. Si (u_n) est la suite constante égale à 2 alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
3. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,\underbrace{33\dots3}_{n \text{ chiffres } 3}$ une suite de nombres décimaux. Il es assez intuitif d'écrire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0,333\dots = \frac{1}{3}$. L'idée se généralise : tout nombre est la limite de la suite de ses valeurs approchées.

Suite des inverses.

Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons déjà conjecturé en classe de première que cette suite converge vers 0. Démontrons-le.

Proposition 1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Démonstration. Démontrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Soient a et b des réels tels que $a < 0 < b$. Ainsi $I =]a,b[$ est un intervalle ouvert contenant 0.

* Analyse.
  Concrètement cette phase est une phase de recherche. On cherche la valeur du rang à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle I en faisant comme si on l'avait déjà trouvé.
  Supposons que nous ayons trouvé un nombre entier N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in I$. Autrement dit :
  $$a < u_n < b.$$
  Donc : $\frac{1}{n} < b$, *i.e.*, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $n > \frac{1}{b}$.
* Synthèse.
  Soit $N = \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$.
  Si nous prenons n plus grand que le rang N alors :
  $$n \geqslant N$$
  $$n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$$
  $$n > \frac{1}{b}$$

Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n} < b$$

Comme de plus $a < 0 < \frac{1}{n}$ nous avons bien : $a < \frac{1}{n} < b$.

Autrement dit : $\frac{1}{n} \in]a,b[$.

À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]a,b[$.

Quel que soit l'intervalle I contenant 0 il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.

Autrement dit, par définition :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

Remarques.

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ n'est pas stationnaire. Les nombres $\frac{1}{n}$ ne sont jamais égaux à la limite 0. Ils s'en approchent indéfiniment.
2. c'est une première suite de référence dont il faut connaître par cœur la limite. Cette suite est appelée la suite des inverses.

Suite inverse de racine carrée.

Proposition 2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Notons $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ (magie...).

Démontrons que, à partir du rang N, tous les termes de la suite sont dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$.

Soit $n \geqslant N$.

$n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$ donc, la fonction racine carrée étant strictement croissante, $\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Comme de plus $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0 > -\varepsilon$ nous avons bien $\frac{1}{\sqrt{n}} \in]-\varepsilon,\varepsilon[$.

$$\boxed{\text{Nous avons démontré que } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.}$$

Unicité de la limite.

Proposition 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, ℓ_1 et ℓ_2 des nombres réels. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Nous allons utiliser un procédé très classique pour démontrer l'unicité d'un objet mathématique : nous allons supposer qu'il en existe deux, *a priori* distincts, et démontrer qu'ils sont nécessairement égaux.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2.

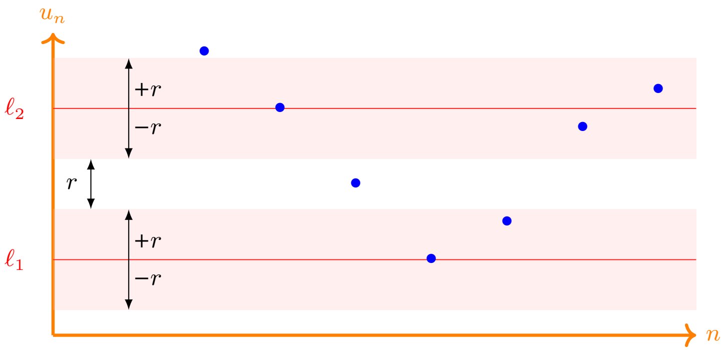
Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$ en raisonnant par l'absurde.

Supposons donc que $\ell_1 < \ell_2$ et démontrons que cela conduit à une contradiction.

Soit $r = \frac{1}{3}(\ell_2 - \ell_1)$.

L'idée est que nous devrions avoir tous les points de la suite (hormis un nombre fini d'entre eux) dans deux intervalles disjoints ce qui est impossible.

Ci-dessous une représentation graphique des deux intervalles que nous allons considérer : $]\ell_1 - r,\ell_1 + r[$ et $]\ell_2 - r,\ell_2 + r[$.



Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]\ell_1 - r, \ell_1 + r[$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_1$ alors

$$\ell_1 - r < u_n < \ell_1 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_1.

De la même façon il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant N_2$ alors :

$$\ell_2 - r < u_n < \ell_2 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_2.

Mais donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, alors : $u_n < \ell_1 + r < \ell_2 - r < u_n$.

Autrement dit : $u_n < u_n$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde que, nécessairement $l_1 = l_2$.

Autrement dit

la limite d'une suite convergente est unique.

Remarques.

1. Ce résultat démontre l'unicité de la limite d'une suite.
2. Nous pourrons donc maintenant parler de <u>la</u> limite d'une suite.
3. Ce résultat permet également, grâce à sa contraposée, d'établir que certaines suites ne sont pas convergentes : si la suite des termes de rangs pairs et celle des termes de rangs impairs ne converge pas vers la même limite alors la suite ne converge pas (et même elle n'a pas de limite). Vous aurez extrêmement rarement à démontrer qu'une suite n'a pas de limite.

Suite bornée.

Définition 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est *bornée* si et seulement si il existe un encadrement de u_n valable quel que soit $n \geqslant p$. Autrement dit il existe des réels m et M tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Remarques.

1. Dans ce cas m est appelé *un minorant* de la suite et M *un majorant*. Attention minorant et majorant ne sont pas nécessairement des minima et maxima.

Proposition 4. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers un réelle ℓ.

Soient a et b des réels tels que $a < \ell < b$.

$]a,b[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ donc, par définition de la convergence, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]a,b[$. Donc les termes u_n pour $n \geqslant N$ sont bornés par a et b.

Si maintenant $0 \leqslant n < N$ alors les u_n sont mieux que bornés : ils ont un maximum M et un minimum m, car il y en a un nombre fini.

Le majorant global est donc $\max(M,b)$ et le minorant $\min(m,a)$.

Proposition 5. La suite $(-1)^n$ est bornée mais divergente.

Démonstration. $-1 \leqslant (-1) \leqslant 1$ et les suites de termes de rangs pairs et impaires converge vers de limites différentes ce qui contredirait l'unicité de la limite donc elle diverge.

Remarques.

1. Ce résultat démontre que la réciproque de la précédente proposition est fausse. Toutes les suites bornées ne sont pas forcément convergente.

Opérations sur les limites.

Proposition 6. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(v_n)_{n\geqslant q}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 des réels.

(i) $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$.
(ii) $\lim_{n\to+\infty} \alpha u_n = \alpha\ell_1$.
(iii) $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell 2$.
(iv) Si (v_n) ne s'annule pas et si $\ell_2 \neq 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Remarques.

1. Les opérations sur les suites convergentes se traduisent par les mêmes opérations sur les limites (sauf la division par 0 bien entendu).
2. Les deux premiers points établissent que l'ensemble des suites convergentes est stable par combinaisons linéaires et donc que c'est un espace vectoriel.
3. Notons et retenons une forme indéterminée : si (v_n) ne s'annule pas et si $\ell_2 = 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =?$.

Exemples.

1. En considérant la suite des inverses et une suite constante égale à -7 nous pouvons donc affirmer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} - 7 = 3 \times 0 - 7 = -7$.
2. $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (obtenue en multipliant par -1.
3. Par contre nous ne pouvons a priori rien dire pour la suite $\left(\frac{1}{n} \div \frac{1}{n}\right)$: c'est une forme indéterminée. Cependant en modifiant l'écriture, $\frac{1}{n} \div \frac{1}{n} = 1$, nous voyons qu'il s'agit en fait d'une suite constante donc convergente vers 1. Si la limite du dénominateur est nulle il faudra essayer de lever l'indétermination sur la limite par d'autres biais (comme ici une ré-écriture de la formule). C'était déjà ce procédé que vous utilisiez pour les limites de taux d'accroissement en première.
4. Notons $u_n = \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2-3^2}{\frac{1}{n}}$ pour $n \geqslant 1$. u_n est un taux d'accroissement de la fonction carré entre 3 et $3 + \frac{1}{n}$. On retrouve comme l'année dernière une forme indéterminé (division par zéro) mais nous pouvons lever l'indétermination en écrivant : $u_n = \frac{9+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}-9}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}\left(6+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 6 + \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} 6 + \frac{1}{n} = 6$.

5. $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n}$ donc par produit $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = 0$.

Proposition 7. Soit $m \in \mathbb{N}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^m} = 0$.

Démonstration. $\frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n}$ et on utilise la précédente proposition.

Remarques.

1. Les suites $\left(\frac{1}{n^m}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ font maintenant partie des suites de références dont nous pourrons utiliser la limite sans la justifier.

EXERCICE 1. Calculez la limite de la suite dont on donne un terme général dans chaque cas.

a) $\frac{1}{n} + 4$.
b) $\frac{3}{n} - 13$.
c) $\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^2}$.
d) $\frac{1}{\sqrt{n}n^2}$.
e) $\frac{1}{13n^2}$.
f) $1 + \frac{-6}{7n^8}$.
g) $\frac{8-\frac{1}{n^2}}{-6}$.
h) $\frac{1}{n^3}\left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$.
i) $\frac{-6+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}{7-\frac{1}{n}}$.

Dans l'exercice qui suit nous allons voir et mettre en œuvre une astuce algébrique pour lever l'indétermination dans certains calculs : factoriser par la plus grande puissance de n.

EXERCICE 2. Vérifiez que la suite dont on donne le terme général correspond (a priori) à un forme indéterminée de limite puis levez l'indétermination (en factorisant par la plus grande puissance de n au numérateur et au dénominateur ou tout autre procédé permettant de retrouver des limites connues) et en déterminant la limite.

a) $\frac{n^3}{n^9}$.
b) $\frac{\sqrt{n}}{n}$.
c) $\frac{n^2-6\sqrt{n}+7}{-5n^2+n\sqrt{n}}$.
d) $\frac{n^2+6n+3}{n^3-5n-12}$.
e) $\frac{3n^4-n+1}{5n^4+4n^3+n^2+3}$.
f) $\frac{-7n^2+n-12}{n^7}$.

Comparaison de limites.

Proposition 8. Soient $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$, $(u_n)_{n\geqslant p}$, $(v_n)_{n\in\geqslant q}$ et $(w_n)_{n\geqslant r}$ trois suites convergentes. Si pour un certain rang $N \in \mathbb{N}$ on a : $\forall n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n$.

Remarques.

1. Même si l'encadrement est stricte sur les suites l'encadrement sur les limites est forcément large comme le montre cet exemple : $1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ et pourtant $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$.

Proposition 9. Soient $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$, $(u_n)_{n\geqslant p}$, $(v_n)_{n\in\geqslant q}$ et $(w_n)_{n\geqslant r}$ trois suites. Si $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(w_n)_{n\geqslant r}$ converge vers une même limite ℓ et si, pour un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a : $\forall n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration. Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \in]a,b[$.

De même il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $w_n \in]a,b[$.

Donc à partir du rang $N = \max(N_1,N_2)$, $u_n \in]a,b[$ et $v_n \in]a,b[$.

Puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, forcément $v_n \in]a,b[$.

Ainsi quel qu soit l'intervalle ouvert $]a,b[$ contenant ℓ, à partir d'un certain rang, cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n).

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

Remarques.

1. Ce résultat est appelé *théorème des gendarmes* (ou des sandwichs).
2. Ce résultat permet de déterminer des limites pour des suites dont éventuellement on ne connais pas la formule explicite ou du moins qui ne s'exprimer comme des sommes ou produit de suites de référence.

Exemples.

1. $\left(\frac{\cos(n)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ semble difficile à étudier mais nous savons que $-1 \leqslant \cos(n \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

EXERCICE 3. Démontrez que $\left(\frac{(-1)^n}{n^7}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et précisez sa limite.

EXERCICE 4. Démontrez que $\left(\frac{\sin(n^2+1)}{n^4}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et précisez sa limite.

Théorème de la limite monotone.

Théorème 1. Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) est convergente vers un réel ℓ et $\ell \leqslant M$ (resp. $m \leqslant \ell$).

Démonstration. $\{u_n \mid n \geqslant p\}$ est une parti non vide est majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure ℓ. Reste à démontrer que la suite converge vers ℓ.

Remarques.

1. Comme beaucoup de théorème d'existence, c'est un résultat très important. Grâce à ce théorème on pourra savoir si les suites monotones converges ou pas même si nous ne sommes pas capable de trouver la limite de cette suite.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques ou une utilisation du théorème du point fixe.
3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant : $\ell \neq M$ et $\ell \neq m$. Si c'est le cas il faut le démontrer en plus.
4. Nous utiliserons tout particulièrement ce résultat pour les suites définies par récurrences pour lesquelles nous pourrons pas utiliser les opérations sur les limites.

Exemples.

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie, quel que soit $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ est croissante et majorée (démontrable algébriquement) par 3 donc elle converge vers un réel ℓ et $\ell \leqslant 3$. Nous verrons bientôt que sa limite n'est pas trois mais 2.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2$. Nous avons déjà démontré par récurrence que $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Nous en déduisons que la suite et croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, et donc, qu'elle converge vers un réels ℓ tel que $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

EXERCICE 5. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donnez un minorant de la limite.

EXERCICE 6. Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Déduisez-en que (u_n) converge.

Exercices.

EXERCICE 7. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez. Pour établir la majoration on établira ; pour tout entier $k > 1$: $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{k}$.

EXERCICE 8. Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

EXERCICE 9. On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = frac11^3 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$.

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
3. Qu'en conclure ?
4. Soit $\varepsilon > 0$. Écrivez un algorithme qui renvoie une valeur approchée à ε près de la limite de la suite (u_n).