

Suites géométriques.

Définition.

Définition 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle suite géométrique toute suite numérique $(u_n)_{n \geq p}$ telle qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p) \Rightarrow (u_{n+1} = qu_n)$.

Remarques.

1. Si $(u_n)_{n \geq p}$ est géométrique et à termes tous non nuls alors $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est appelé *la raison* de la suite.
2. Pour définir complètement une suite géométrique (être capable d'en calculer tous les termes) il faut connaître son premier terme et sa raison.
3. La suite géométrique est donc définie par une relation de récurrence (l'égalité liant u_n et u_{n+1}).

Exemples.

1. La suite des puissances successives de 2 est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
2. Une suite géométrique de premier terme 0 est constante égale à 0, et ce, quel que soit la raison.

EXERCICE 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique. Déterminez la raison de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sachant que $u_4 = 2$ et $u_5 = -3$.

Formule explicite.

Proposition 1. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq p}$ une suite et $q \in \mathbb{R}$. $(u_n)_{n \geq p}$ est géométrique de raison q si et seulement si : $\forall n \geq p, u_n = u_p q^{n-p}$.

Démonstration.

Remarques.

1. On a une caractérisation des suites géométriques : si on identifie une formule explicite de la forme $u_n = u_p q^{n-p}$ nous pouvons affirmer que la suite est géométrique (mais aussi donner sa raison). Cette formule ne permet pas de déterminer le premier terme ni son rang ce dernier pouvant être choisi arbitrairement.

EXERCICE 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique à termes strictement positifs. Montrez que $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique en précisant sa raison et son premier terme.

EXERCICE 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique. Déterminez la raison de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sachant que $u_5 = 4$ et $u_{17} = 23$. Pour cet exercice vous pourrez utiliser la fonction $\ln$ ou la racine n -ième.

Monotonie.

Proposition 2. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq p}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

- * Si $q \in \mathbb{R}_+^*$ alors la suite n'est pas monotone.
- * Si $q = 0$ alors la suite est stationnaire.
- * Si $q = 1$ alors la suite est constante.
- * Si $u_p > 0$ et $q \in]0; 1[$ alors la suite est strictement décroissante.
- * Si $u_p > 0$ et $q \in]1, +\infty[$ alors la suite est strictement croissante

Démonstration.

Remarques.

1. Si $u_p < 0$ la monotonie change dans les deux dernières assertions.

EXERCICE 4. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants.

- a) $u_0 = -203$ et, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 7$.
- b) Quel que soit $n \geq 12$, $u_{n+1} = -56 + 14(n - 12)$.
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n - 27$.
- d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 2)^2 - (n - 3)^2$.

Somme des termes de la suite (série associée).

Proposition 3. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite. Si $(u_n)_{n \geq p}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ alors, quel que soit $n \geq p$, $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Démonstration. Une démonstration algébrique pour changer un peu des récurrences.

* Commençons par un cas particulier : $p = 0$ et $u_0 = 1$. Ainsi on cherche à calculer $\sum_{k=0}^n q^k$.
Or nous remarquons en distribuant (par télescopage) : $(1+q+q^2+\dots+q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$
et donc $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

* Revenons au cas général :

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^n u_p q^{k-p}$$

En factorisant par u_p et en procédant au changement de variable $j = k - p$:

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \sum_{j=0}^{n-p} q^j$$

Et d'après la cas particulier :

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Remarques.

1. Pour faciliter la mémorisation nous pouvons essayer de donner du sens à cette formule :

EXERCICE 5. Calculez la somme des 21 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_3 = 2$ et de raison 3.

Limites.

Du fait de l'expression explicite des termes de la suite géométrique le problème des limites se ramène à l'étude de celles des suite des la forme (q^n) .

Proposition 4. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $q \in \{0; 1\}$ alors $(q^n)_{n \geq p}$ est convergente.
- (ii) Si $q \in]1, +\infty[$ alors $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (iii) Si $q \in]0; 1[$ alors $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Démonstration.

- (i) Si $q = 0$ alors (q^n) est la suite nulle qui converge vers 0. Si $q = 1$ alors (q^n) est la suite constante égale à 1 qui converge vers 1.
- (ii) Nous avons vu l'inégalité de Bernoulli : $\forall (x, n) \in]-1, +\infty[\times \mathbb{N}$, $(x+1)^n \geq 1+nx$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q > 1$. Pour $x = q - 1$: $q^n = ((q-1)+1)^n \geq 1+n(q-1)$. Or $q-1 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+n(q-1) = +\infty$ puis par comparaison des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- (iii) Si $q \in]0; 1[$ alors $\frac{1}{q} > 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\frac{1}{q})^n} = 0$.

Croissances comparées.

Proposition 5. Si $1 < q$ alors $\frac{n^\alpha}{q^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Proposition 6. Si $1 < q$ alors $\frac{q^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.