Suites arithmétiques.

Définition.

Définition 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle suite arithmétique toute suite numérique $(u_n)_{n \geq p}$ telle qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p) \Rightarrow (u_{n+1} = u_n + r)$.

Remarques.

1. Si $(u_n)_{n \geq p}$ est arithmétique alors $r = u_{n+1} - u_n$ est appelé *la raison* de la suite.
2. Pour définir complètement une suite arithmétique (être capable d'en calculer tous les termes) il faut connaître son premier terme et sa raison.
3. La suite arithmétique est donc définie par une relation de récurrence (l'égalité liant u_n et u_{n+1}).

Exemples.

1. La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
2. La suite de premier terme 0 et de raison 2 est la suite des entiers naturels pairs.
3. La suite $(2n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des entiers naturels impairs.
4. Les suites constantes sont des suites arithmétiques de raison 0.
5. La suite des multiples de $k \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison k .

EXERCICE 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Déterminez la raison de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sachant que $u_4 = 2$ et $u_5 = -3$.

Formule explicite.

Proposition 1. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq p}$ une suite et $r \in \mathbb{R}$. $(u_n)_{n \geq p}$ est arithmétique de raison r si et seulement si : $\forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r$.

Démonstration. Démontrons une implication et sa réciproque.

* Supposons que $(u_n)_{n \geq p}$ est arithmétique de raison r et démontrons qu'alors : $\forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r$.

Il s'agit de démontrer une formule explicite nous pouvons faire une démonstration par récurrence.

* Supposons : $\forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r$ et démontrons que $(u_n)_{n \geq p}$ est arithmétique.

Soit $k \geq p$.

La formule $u_n = u_p + (n - p)r$ étant vrai pour tout n elle est vraie pour $k + 1$: $u_{k+1} = u_p + (k + 1 - p)r = u_p + (k - p)r + r = u_k + r$.

On a montré que : $\forall k \geq p, u_{k+1} = u_k + r$, autrement dit $(u_n)_{n \geq p}$ est arithmétique.

Nous avons démontré par condition nécessaire et suffisante que la proposition est vraie.

Remarques.

1. On a une caractérisation des suites arithmétiques : si on identifie une formule explicite de la forme $u_n = u_p + (n - p)r$ nous pouvons affirmer que la suite est arithmétique (mais aussi donner sa raison). Cette formule ne permet pas de déterminer le premier terme ni son rang ce dernier pouvant être choisi arbitrairement.

EXERCICE 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Déterminez la raison de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sachant que $u_5 = 4$ et $u_{17} = 23$.

Représentation graphique.

Proposition 2. La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points tous alignés sur la même droite.

Démonstration. Découle de la formule explicite de la suite arithmétique qui fait apparaître l'expression d'une fonction affine.

Remarques.

1. Il y a même une équivalence mais j'ai la flemme là...

Monotonie.

Proposition 3. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq p}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. $(u_n)_{n \geq p}$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante, resp. constante) si et seulement si $r > 0$ (resp. $r < 0$, resp. $r = 0$).

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$. $(u_n)_{n \geq p}$ est strictement croissante si et seulement si : $\forall n \geq p, u_{n+1} - u_n > 0$. Or $u_{n+1} - u_n = r$ donc : $(u_n)_{n \geq p}$ est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.

EXERCICE 3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants.

- a) $u_0 = -203$ et, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 7$.
- b) Quel que soit $n \geq 12$, $u_{n+1} = -56 + 14(n - 12)$.
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n - 27$.
- d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 2)^2 - (n - 3)^2$.

Somme des termes de la suite (série associée).

Proposition 4. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite. Si $(u_n)_{n \geq p}$ est arithmétique alors, quel que soit $n \geq p$, $\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$.

Démonstration. Démonstration par récurrence.

Remarques.

1. Pour faciliter la mémorisation nous pouvons essayer de donner du sens à cette formule : il s'agit de la moyenne du premier et du dernier terme de la somme multipliée par le nombre de termes de la somme.
2. Nous remarquons : $u_p + u_n = u_{p+1} + u_{n-1} = u_{p+2} + u_{n-2} = \dots$

EXERCICE 4. Calculez la somme des 21 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_3 = 20$ et de raison 4.