

Étude de la convergence de suites.

I Exemples introductifs.

- 1 0,999... = 1.
- 2 Achille et la tortue.
- 3 Plusieurs valeurs d'adhérence.
- 4 Divergence vers l'infini.
- 5 Divergence sans limite.

II Majorant, minorant.

Définition 1

Soient :

- . $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle,
- . M et m deux réels.

Nous dirons que

- (i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *majorée* par M si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$;
- (ii) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *minorée* par m si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$;
- (iii) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques.

1. Un majorant n'est pas un maximum. Pas plus qu'un minorant n'est un minimum.
Cependant un maximum est un majorant et un minimum un minorant.
2. Ainsi une suite est bornée s'il est possible de trouver des nombres m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.
3. Trouver un minorant et un majorant pour une suite c'est limiter les possibilités de valeurs des termes de la suite. Dans de nombreux cas il faut se contenter de cela.

III Suites convergentes.

Définition 2

Soient :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite,
- $\ell \in \mathbb{R}$ un réel.

Nous dirons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers ℓ* si et seulement si : quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ , il contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Remarques.

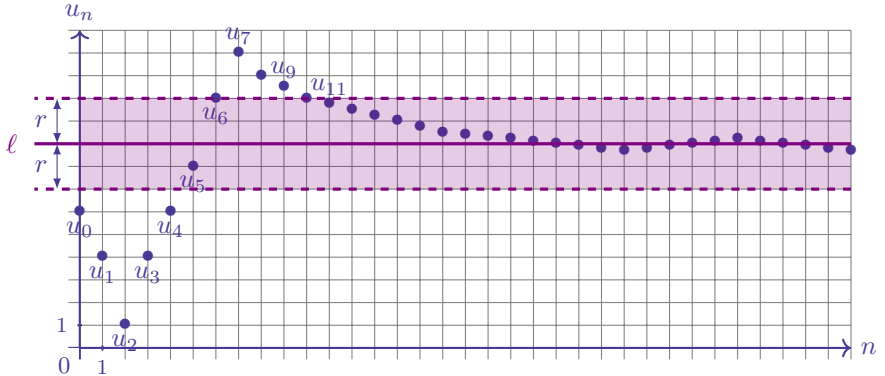
1. En cas de convergence nous dirons que ℓ est une *limite de* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et nous noterons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

ou

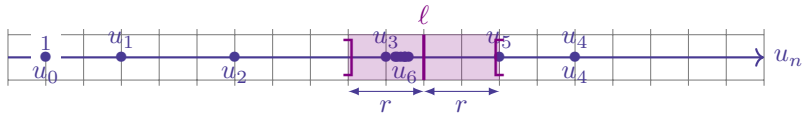
$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

2. Autrement dit si on délimite une petite zone autour de ℓ (en fait n'importe qu'elle zone) tous les points de la suite hormis un nombre fini d'entre eux sont dans cette zone.
3. La convergence est une propriété à l'infinie qui ne dépend pas des premiers termes. Donc si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ alors $(u_n)_{n \geq 7}$ converge aussi vers ℓ .
4. Les intervalles ouverts doivent être imaginés comme des ensembles de plus en plus petit autour de ℓ . Aussi petit soit l'intervalle ouvert contenant ℓ il contiendra tous les termes de la suite hormis quelques uns (un nombre fini en tout cas). Il y a un aspect dynamique dans cette définition : on peut se rapprocher autant qu'on le veut de ℓ , ça ne change rien.
5. Les intervalles doivent être ouverts car, sauf si la suite est stationnaire, la valeur limite n'est pas atteinte, et donc l'intervalle fermé $[\ell; \ell]$ qui contient ℓ ne contient, en général, aucun terme de la suite.
6. Le plus souvent dans les démonstrations nous travaillerons avec des intervalles ouverts centrés sur la limite ℓ et de rayon r : $]\ell - r, \ell + r[$. Mais ceci ne change rien à la généralité des résultats.
7. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule explicite.



À partir de u_{11} les termes de la suite sont tous dans l'intervalle ouvert $]l - r, l + r[$.

8. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule de récurrence.



9. Cette définition est un outil (assez théorique c'est vrai) pour démontrer qu'une suite est convergente. Nous en verrons d'autres dans cette leçon.
10. Remarquons que la limite éventuelle d'une suite devra être conjecturée.
11. C'est comme si la suite était infiniment bornée à l'infini.

Proposition 1 - Unicité de la limite.

Soient

- . $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle,
- . l_1 et l_2 des nombres réels.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_1 et l_2 , alors $l_1 = l_2$.

Remarques.

1. Nous pourrons donc maintenant parler de la limite d'une suite.

Proposition 2

Toute suite convergente est bornée.

IV Suites divergentes.

1 Cas général.

Définition 3

Nous dirons qu'une suite *diverge* si et seulement si elle ne converge pas.

Remarques.

1. Cette définition recouvre une multitudes de cas possibles. Certains sont étudiés à part. Nous verrons ci-après la divergence avec limite infinie et la divergence avec plusieurs valeurs d'adhérence.

2 Divergence avec limite infinie.

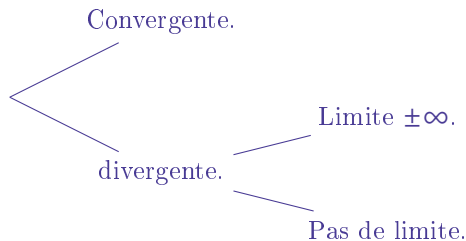
Définition 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet pour limite $+\infty$* si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Nous avons également la définition en $-\infty$.
Nous dirons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet pour limite $-\infty$* si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
2. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de terme qui soient plus petits.
3. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est un cas particulier de suite divergente. Voici un schéma qui résume les possibilités lors de l'étude de la convergence d'une suite.



3 Divergence sans limite.

V Opérations sur les limites.

1 Somme.

Remarques.

1. Le tableau est symétrique par rapport à sa diagonale.
2. Ces résultats se démontrent avec les définitions des convergences et limites données.
3. Plutôt que d'apprendre par cœur, un peu de bon sens permet de deviner ces résultats.

2 Produit.

Remarques.

1. En combinant ces résultats aux précédents, nous remarquons que les suites convergentes sont stables par combinaisons linéaires : si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors $(\alpha u_n + v_n)$ est convergente. Ce qui signifie que les suites convergentes peuvent être vues comme des vecteurs.
2. Ce résultat nous autorise à passer à la limite dans des égalités. Si (u_n) converge vers ℓ et si, par exemple, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ alors, en passant à la limite $\ell = 2\ell + 3$. C'est une astuce à retenir.

3 Inverse.

4 Quotient.

5 Exercices.

VI Limites et comparaison.

1 Limites finies.

Proposition 3 - Théorème des gendarmes.

Soient :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles,
- $\ell \in \mathbb{R}$.

Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell,$$

alors

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Proposition 4 - Passage à la limite dans des inégalités (et égalités).

Soient :

- $a, b \in \mathbb{R}$,
- $\ell \in \mathbb{R}$,
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers ℓ .

(i) Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \leq b \text{ alors } \ell \leq b.$$

(ii) Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \geq a \text{ alors } \ell \geq a.$$

(iii) Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a \leq u_n \leq b \text{ alors } a \leq \ell \leq b.$$

Remarques.

1. Ce résultat signifie que l'on peut passer à la limite dans une inégalité large.
2. Ce n'est pas vrai avec des inégalités strictes en général.
3. En particulier on retrouve que toute suite convergente est bornée.

2 Limites infinies.

Proposition 5

Soient :

· $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles.

(i) Si, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n$$

et si

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

alors

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

(ii) Si, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n$$

et si

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty,$$

alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

VII Théorème de la limite monotone.

1 Limite finie.

Proposition 6 - Théorème de la limite monotone.

- (i) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
- (ii) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Remarques.

1. Contrairement au théorème des gendarmes, celui-ci ne permet pas de connaître la limite mais uniquement son existence.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques.

3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant.

2 Limite infinie.

Proposition 7 - Théorème de la limite monotone.

- (i) Toute suite réelle croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.
- (ii) Toute suite réelle décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

VIII Suites géométriques.

Proposition 8

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $q = 1$ alors (q^n) est la suite constante égale à 1.
- (ii) Si $1 < q$ alors (q^n) diverge en ayant pour limite $+\infty$.
- (iii) Si $-1 < q < 1$ alors (q^n) converge vers 0.
- (iv) Si $q < -1$ alors (q^n) diverge sans limite ni valeur d'adhérence.
- (v) Si $q = -1$ alors (q^n) diverge avec deux valeurs d'adhérence.

IX Exercices typiques.

X Un peu plus.

XI Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ?