Étude de la convergence de suites.

I Exemples introductifs.

1 $0{,}999\cdots = 1$.

2 Achille et la tortue.

3 Plusieurs valeurs d'adhérence.

4 Divergence vers l'infini.

5 Divergence sans limite.

II Majorant, minorant.

Exercice 1. ☢ Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée.
Déterminez si chacune des suites proposée est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Exercice 2. ☢ Démontrer qu'une suite est bornée.

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \frac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Exercice 3. ☢ Meilleur majorant.

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{2}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   (a) $u_n \geqslant 0$;
   (b) $u_n < \frac{3}{4}$
2. On considère le programme suivant où M est un nombre dans $\left]0; \frac{3}{4}\right[$.

```python
def programme(M):
  n=0
  u=2/7
  while u<M:
    n=n+1
    u=1/3*u+1/2
  return(n)
```

   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?
3. Testez ce programme avec différentes valeurs de M, de plus en plus proche de $\frac{3}{4}$. Que remarquez-vous ?
4. Complétez la conjecture suivante : « $\frac{3}{4}$ semble le plus ... des majorants de la suite (u_n) ».
5. Montrez que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28 \times 3^n}.$$

6. Pourquoi la conjecture précédente est-elle vraie ?

III Suites convergentes.

Exercice 4.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

IV Suites divergentes.

1 Cas général.

2 Divergence avec limite infinie.

Exercice 5.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{array}\right. .$$

1. Calculez u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturez une expression explicite de u_n, pour n entier supérieur à 1.
3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

3 Divergence sans limite.

Exercice 7. ☣

Soit (u_n) une suite qui admet comme limite finie le réel ℓ.

1. Explicitez les suite numériques :

$$(u_{2n})_{n\geqslant 0} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\geqslant 0}.$$

2. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ admettent aussi comme limite le réel ℓ.
3. (a) Énonce la propriété de la question précédente sous la forme « si ..., alors... ».
   (b) Déduisez-en la contraposée de cette dernière.
4. On pose $u_n = (-1)^n$, pour tout entier naturel n.
   (a) Justifiez que si la suite (u_n) admet une limite alors cette limite est finie.
   (b) Explicitez pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n} et u_{2n+1}.
   (c) Déduisez-en que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ n'admet aucune limite, finie ou infinie.

Exercice 8. ☣

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

1. Explicitez les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en langage courant.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite ℓ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite ℓ.

V Opérations sur les limites.

1 Somme.

2 Produit.

3 Inverse.

4 Quotient.

5 Exercices.

Exercice 9. Déterminer la limite en utilisant les opérations sur les limites.
Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1 - 2n} - \dfrac{2}{1 - 3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2 + 1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1 - \sqrt{n})$.

Exercice 10. ⚽ Limite en levant l'indétermination.
Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^3 - n + 5.$

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1.$

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3.$

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}.$

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}.$

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}.$

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}.$

h) $u_n = n\sqrt{n^2 + 3} - n^2.$

i) $u_n = n^2 - 3n.$

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2.$

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1.$

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}.$

m) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}.$

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}.$

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}.$

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}.$

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n.$

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}.$

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}.$

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}.$

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}.$

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}.$

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}.$

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$

VI Limites et comparaison.

1 Limites finies.

Exercice 11. ⚽ Convergence et comparaison

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :
$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$
2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :
$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$
3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. ⚽ Convergence et comparaison

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$;

d) $u_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{n^2+\sin(n)}{n^2+\cos(n)}$;

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{1+2\sqrt{2n-(-1)^n}}$.

2 Limites infinies.

Exercice 13. ⚽ Limites infinies et comparaisons.

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n + (-1)^n$;

b) $u_n = n^2 - \sin(n)$;

c) $u_n = \sin\left(\sqrt{2-\cos^3\left(1+n^2-n^n\right)}\right) - n$.

Exercice 14.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0, \ldots, u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

VII Théorème de la limite monotone.

1 Limite finie.

Exercice 15.

On considère la suite $u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Exercice 16.

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge et montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 17.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira ; pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{k}.$$

Exercice 18.

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ converge.

Exercice 19. Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{=1}^{n} \frac{1}{k^3} = + + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   Écrivez un algorithme qui renvoie une valeur approchée à ε près de la limite de la suite (u_n).

2 Limite infinie.

Exercice 20.

Soit (u_n) a suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.
4. Déterminez avec une machine un entier N tel que $u_N > 10$.

VIII Suites géométriques.

Exercice 21.

On considère la suite $u(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. On pose pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}.$$

   Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique dont donnera le premier terme et la raison.

2. Exprimez alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminez la limite de la suite (v_n) et enfin celle de la suite (u_n).

Exercice 22.

On note $v_0 = -\frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \\ w_n = 2v_n + 6 \end{cases}$$

1. Démontrez que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Déduisez-en les expressions de v_n et w_n en fonction de n entier naturel. Déduisez-en la limite de la suite (v_n).
3. Calculez

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (S_n).

Exercice 23. ☢

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1.$$

1. (a) Démontrez que pour tout entier supérieur ou égale à 3, $u_n \geqslant 0$.

   (b)

```python
def algo(M):
  n=0
  u=1
  while u<M:
    n=n+1
    u=1/2*u+n-1
  return(n)
```

   Programmez cet algorithme puis exécutez-le pour M valant 5, 10, 100 et 1000.

   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement à l'infini de la suite (u_n).

   (d) Montrez que, pour tout entier n supérieur ou égale à 4 :

$$u_n \geqslant n - 2.$$

   (e) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. On définit la suite (v_n) sur $\ltimes$ par :

$$v_n = 4u_n - 8n + 24.$$

   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique strictement décroissante et dont on donnera le premier terme et la raison.

   (b) Démontrez que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6.$$

   (c) Vérifiez que, pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$, où (x_n) est une géométrique et (y_n) une suite arithmétique, dont on précisera pour chacune, le premier terme ainsi que la raison.

   (d) Déduisez-en l'expression de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

   en fonction de n entier naturel.

Exercice 24. ☢

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Prouver que (u_n) est croissante et majorée. Concluez.
Pour la majoration vous démontrerez par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

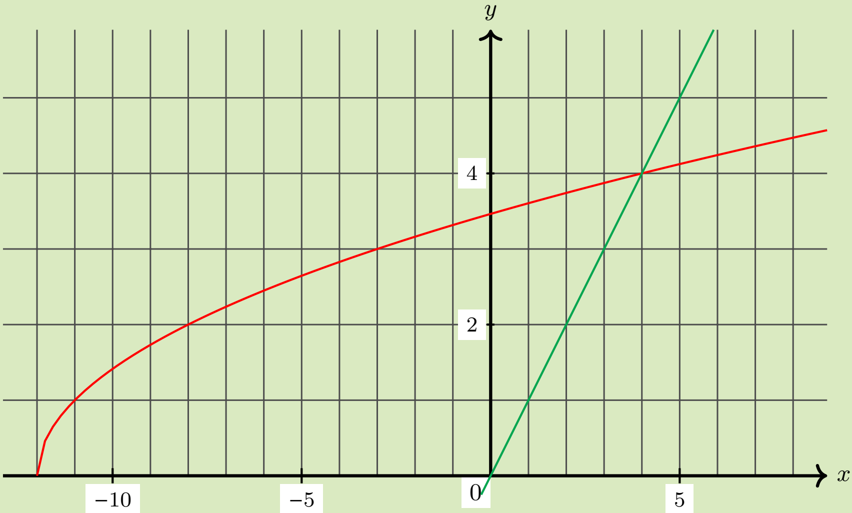
IX Exercices typiques.

Exercice 25.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 26.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n1+} = 1{,}4v_n - 0{,}005v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).

   (c) Conjecturez son comportement.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :i

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0{,}05(x-20)(x-8).$$

   (a) Pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times (8 - v_n).$$

   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n.$$

   (c) Concluez.

Exercice 27.

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 28. ✷—

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1} = 1{,}018p_n + 16.$$
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?
6. Au bout de combien d'années la population va-t-elle tripler, par rapport à celle de 1969 ?

Exercice 29. ✷—

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ ar :
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors :
$$u_n \geqslant 0.$$
Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors :
$$u_n \geqslant n - 3.$$
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 30. ✷— Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5};$$

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).

   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.

   (c) Déterminez la imite de la suite (S_n).

Exercice 30. ✷— Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) défine par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.

Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 31.

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0{,}955T_n + 0{,}9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).
   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0{,}955^n$.
   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).
   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.
   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.
   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.
   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en. exécutant la commande temp(120).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 32. épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

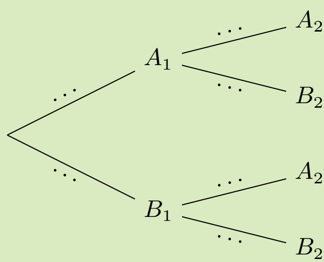
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

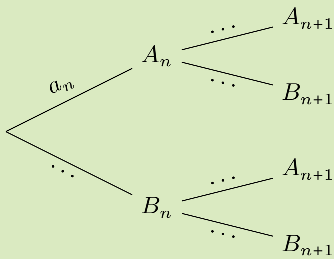
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 32. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

X Un peu plus.

Exercice 33.

Exercice 34. ☣

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1. Calculez u_2 et déduisez-en que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n :
$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$
   (a) Calculez v_0.
   (b) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) Déduisez-en que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (d) Exprimez vhn en fonction de n entier naturel.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$
   (a) Calculez w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimez w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   (d) Exprimez w_n en fonction de n entier naturel.
4. Montrez que pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$
5. Pour tout entier naturel n on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} uk = u_0 + \cdots + u_n.$$
Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 35. ☢

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal 1 :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Les quatre premiers termes de la suite sont : $w_0 = 1$, $w_1 = 3$, $w_2 = 5$ et $w_3 = 7$.

1. Détaillez le calcul permettant d'obtenir w_4.
2. Voici une fonction en Python.

```
def fonction(m):
  n=0
  w=1
  while w!m:
    n=n+1
    w=(n+1)/n*w+1/n
  return(n)
```

   (a) Pour $m = 4\,027$ quelle valeur de n le programme donne-t-il ?

   (b) Quel est l'intérêt de ce programme ?

   (c) En déduire une conjecture de l'expression de w_n en fonction de n.

3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en $w_{2\,013}$.

Exercice 36. ☣ Partie A.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. Peut-on affirmer que pour tout entier n, $u_n \in [-1;1]$.
2. Montrez que si u_0 est un entier pair, alors la suite (u_n) est constante à partir du rang 1.
3. Montrez que si u_0 est impair, alors la suite (u_n) est à valeurs dans $\{-1;1\}$ à partir du rang 1.

Exercice 36. ☣ Partie B.

Dans cette partie on suppose que u_0 n'est pas entier.

4. Établissez le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$.
5. (a) Déduisez-en que, pour tout entier supérieur ou égal à 1, $u_n \in [-1;1]$.
   (b) Déduisez-en que la suite (u_n) est bornée.
   (c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, (u_n) est monotone ?
6. (a) Montrez que si $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, alors :
   $$f(x) \in]-1;0[\cup]0;1[.$$
   (b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, que si u_0 n'est pas entier, alors u_n n'est pas entier.
7. (a) Justifiez que l'image par f de l'intervalle $]0;1[$ est l'intervalle $]-1;0[$, puis que l'image par f de l'intervalle $]-1;0[$ est l'intervalle $]0;1[$.
   (b) Déduisez-en que, quel que soit le rang, la suite (u_n) ne peut être monotone.

Exercice 37. ☣ Partie A.

Exercice 38. ☣

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$.

1. Justifiez que la suite (w_n) est décroissante.
2. Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$.
3. Déduisez-en que deux suites adjacentes admettent une même limite finie.

Exercice 39. ☣ Partie B.

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrez que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante.
2. Déduisez-en que les suites $hu_n)$ et (v_n) sont adjacentes.
3. On note e la limite commune des suites.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Expliquez pourquoi $\frac{1}{n \times n!} < \varepsilon$ est une condition suffisante pour que u_n et v_n soient toutes les deux des approximation de e à ε près.
   (b) Expliquez le fonctionnement ainsi que l'utilité de l'algorithme suivant.

```
def fonction(epsilon):
  n=1
  u=2
  v=3
  factoriel=1
  while 1/(n*factoriel)>=epsilon:
    n=n+1
    factoriel=n*factoriel
    u=u+1/factoriel
    v=u+1/(n*factoriel)
  return [n,u,v]
```

   (c) Programmez cet algorithme.
   (d) Quel intérêt y-a-t-il à afficher `u` et `v` ?
   (e) Déduisez-en les premières décimales de e.
4. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$. En utilisant le fait que $u_q < \mathrm{e} < v_q$, montrez qu l'on aboutit à une contradiction.
5. Que concluez-vous ?

XI Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ?

Exercice 40. ☣

Exercice 41. ☣