Étude de la convergence de suites.

I Exemples introductifs.

1 $0,999\cdots = 1$.

2 Achille et la tortue.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

3 Plusieurs valeurs d'adhérence.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

4 Divergence vers l'infini.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

5 Divergence sans limite.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

II Majorant, minorant.

Dans les exemples nous avons indiqué que les valeurs possibles pour la suite sont limités. Introduisons ici le vocabulaire correspondant.

Définition 1

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. M et m deux réels.

Nous dirons que

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* par M si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* par m si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$;

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques.

1. Un majorant n'est pas un maximum. Pas plus qu'un minorant n'est un minimum.
   Cependant un maximum est un majorant et un minimum un minorant.
2. Ainsi une suite est bornée s'il est possible de trouver des nombres m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
3. Trouver un minorant et un majorant pour une suite c'est limiter les possibilités de valeurs des termes de la suite. Dans de nombreux cas il faut se contenter de cela.

Exemples.

1. Par une étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient aisément : $0 < \frac{1}{x} \leqslant 1$.
   Donc $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, -1, $-234,5$ et majorée par 1, 3, $20\,000$. Donc elle est bornée.
   Remarquons également que cette suite a un maximum mais pas de minimum.
2. $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées puisque nous savons que les fonctions sinus et cosinus sont, par construction, bornées par -1 et 1.
3. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ est bornée : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».

   Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
     Par hypothèse de récurrence :
     $$0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$
     Donc :
     $$0+1 \leqslant 1+u_n \leqslant 2+1.$$
     La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ nous en déduisons :
     $$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{1+u_n} \leqslant \sqrt{3}.$$
     Par conséquent (puisque $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{4} = 2$) :
     $$0 \leqslant u_n n+1 \leqslant 2.$$
     Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 1. ☢ Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée.
Déterminez si chacune des suites proposée est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Correction de l'exercice 1

Dans tous les cas il faut calculer les premiers termes pour émettre une conjecture.

Avec une formule explicite il est parfois possible de deviner l'allure de la courbe représentative sans faire d'étude approfondie.

a) Clairement minorée par 0. (u_n) décroissante et $u_0 = 3$ donc majorée par 3.

b)

* En utilisant la forme canonique de l'homographie : $u_n = \frac{\frac{1}{2}(2n-3)}{2n-3} + \frac{\frac{3}{2}-1}{2n-3} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{n-\frac{3}{2}}$

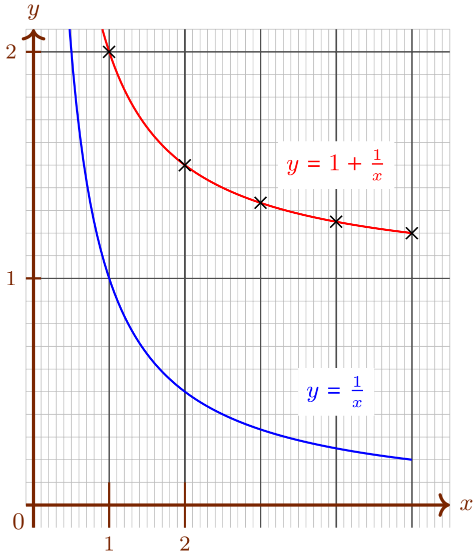
  Le tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-\frac{3}{2}}$ est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	‖	$\searrow$

  Nous voyons qui faut tenir compte de ce qui se passe avant $\frac{3}{2}$ et après $\frac{3}{2}$.
  Donc u_n est inférieur ou égale au maximum de $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = 1$. Ainsi (u_n) admet un majorant égale à 1 qui est aussi un maximum.

* Si $n \geqslant 2$, clairement $u_n \geqslant 0$. Comme de plus $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_1 = 0$ nous pouvons conclure (u_n) admet un minorant égale à 0 qui est atteint c'est donc in minimum.

c) Là encore utilisons la forme canonique de l'homographie : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.



(u_n) admet un maximum égale à 2 car décroissante et est minorée (apparemment par 1) mais clairement par 0.

d) Nous ne pouvons pas pour l'instant l'établir mais cette suite n'est pas bornée les termes de rangs pairs prennent des valeurs infiniment grandes et ceux de rangs impairs infiniment petites.

e)

* $\sqrt{n^2+1} - n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2}$ et puisque la fonction racine carrée est croissante : $\sqrt{n^2+1} - n \geqslant 0$. Autrement dit (u_n) est minorée par 0.
* En utilisant l'astuce de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Clairement (u_n) est décroissante (puisque racine carré est croissante) donc (u_n) est décroissante.

(u_n) admet un maximum qui est $u_0 = 1$.

f)

 * $u_n \geqslant 0$ car les fonctions puissances sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\pi \geqslant 3$.
 * (u_n) n'est pas majorée.

g) (u_n) est majorée par 1 qui est d'ailleurs unmmaximum. En effet :

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &\leqslant n^2 + 2n + 1 \\ \sqrt{n^2+n+1} &\leqslant \sqrt{(n+1)^2} \\ \sqrt{n^2+n+1} - 2n &\leqslant n + 1 - 2n \\ \sqrt{n^2+n+1} - 2n &\leqslant -n + 1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons également que (u_n) ne sera pas minorée.

h) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

i) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

Exercice 2. ☢ **Démontrer qu'une suite est bornée.**
Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \dfrac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Correction de l'exercice 2

a) Puisque $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$10 - 2\times 1 \leqslant 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 10 - 2\times 1.$$

Donc

$$8 \leqslant u_n \leqslant 12.$$

b) $0 \leqslant u_n$ et, comme $n < n+2$, $\frac{n}{n+2} < 1$ donc

$$0 \leqslant u_n < 1.$$

c)

d) Clairement $v_n \geqslant 0$.

En notant $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$, nous remarquons que $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Autrement dit c'est la somme des termes d'une suite géométrique.

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{5}\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

De $0 \leqslant \left(\frac{2}{7}\right)^n \leqslant \frac{2}{7}$, nous déduisons : $1 \geqslant 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \geqslant 0$.

e) Comme la précédente question.

f) Comme la précédente question.

Exercice 3. ☢ Meilleur majorant.

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{2}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   (a) $u_n \geqslant 0$;
   (b) $u_n < \frac{3}{4}$
2. On considère le programme suivant où M est un nombre dans $\left]0; \frac{3}{4}\right[$.

```
def programme(M):
  n=0
  u=2/7
  while u<M:
    n=n+1
    u=1/3*u+1/2
  return(n)
```

   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?
3. Testez ce programme avec différentes valeurs de M, de plus en plus proche de $\frac{3}{4}$. Que remarquez-vous ?
4. Complétez la conjecture suivante : « $\frac{3}{4}$ semble le plus ... des majorants de la suite (u_n) ».
5. Montrez que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28 \times 3^n}.$$

6. Pourquoi la conjecture précédente est-elle vraie ?

III Suites convergentes.

Définition 2

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite,

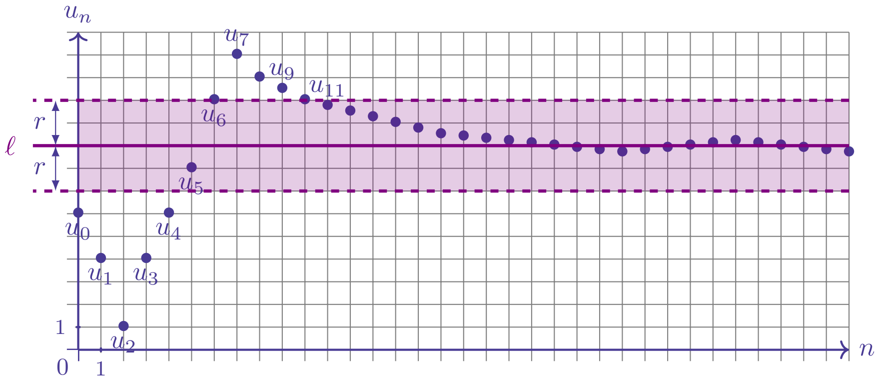
. $\ell \in \mathbb{R}$ un réel.

Nous dirons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si et seulement si : quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, il contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Remarques.

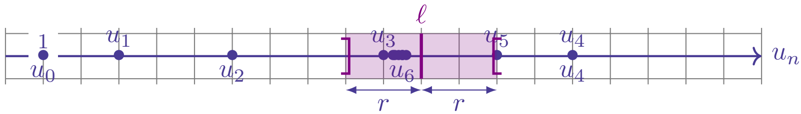
1. En cas de convergence nous dirons que ℓ est une *limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et nous noterons :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
ou
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

2. Autrement dit si on délimite une petite zone autour de ℓ (en fait n'importe qu'elle zone) tous les points de la suite hormis un nombre fini d'entre eux sont dans cette zone.
3. La convergence est une propriété à l'infinie qui ne dépend pas des premiers termes. Donc si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ alors $(u_n)_{n\geqslant 7}$ converge aussi vers ℓ.
4. Les intervalles ouverts doivent être imaginés comme des ensembles de plus en plus petit autour de ℓ. Aussi petit soit l'intervalle ouvert contenant ℓ il contiendra tous les termes de la suite hormis quelques uns (un nombre fini en tout cas). Il y a un aspect dynamique dans cette définition : on peut se rapprocher autant qu'on le veut de ℓ, ça ne change rien.
5. Les intervalles doivent être ouverts car, sauf si la suite est stationnaire, la valeur limite n'est pas atteinte, et donc l'intervalle fermé $[\ell;\ell]$ qui contient ℓ ne contient, en général, aucun terme de la suite.
6. Le plus souvent dans les démonstrations nous travaillerons avec des intervalles ouverts centrés sur la limite ℓ et de rayon r : $]\ell-r,\ell+r[$. Mais ceci ne change rien à la généralité des résultats.
7. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule explicite.



À partir de u_{11} les termes de la suite sont tous dans l'intervalle ouvert $]\ell - r, \ell + r[$.

8. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule de récurrence.



9. Cette définition est un outil (assez théorique c'est vrai) pour démontrer qu'une suite est convergente. Nous en verrons d'autres dans cette leçon.
10. Remarquons que la limite éventuelle d'une suite devra être conjecturée.
11. C'est comme si la suite était infiniment bornée à l'infini.

Exemples.

1. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
2. Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   Nous avons déjà conjecturé en classe de première que cette suite converge vers 0.
   Démontrons-le.

   Démontrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   Soient a et b des réels tels que $a < 0 < b$. Ainsi $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert contenant 0.

* Analyse.
  Concrètement cette phase est une phase de recherche. On cherche la valeur du rang à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle I en faisant comme si on l'avait déjà trouvé.

  Supposons que nous ayons trouvé un nombre entier N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in I$. Autrement dit :

$$a < u_n < b.$$

  Donc :

$$\frac{1}{n} < b,$$

  i.e., la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$n > \frac{1}{b}.$$

* Synthèse.
  Soit $N = \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$.
  Si nous prenons n plus grand que le rang N alors :

$$\begin{aligned} n &\geqslant N \\ n &\geqslant \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor \\ n &> \frac{1}{b} \end{aligned}$$

  Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n} < b$$

  Comme de plus $a < 0 < \frac{1}{n}$ nous avons bien : $a < \frac{1}{n} < b$.
  Autrement dit : $\frac{1}{n} \in]a, b[$.
  À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]a, b[$.

Quel que soit l'intervalle I contenant 0 il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.
Autrement dit, par définition :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

On notera $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ou $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. ♥ Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. *confere infra.*

4. ♥ La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. *confere infra.*

Exercice 4.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Proposition 1 - Unicité de la limite.

Soient
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,
. ℓ_1 et ℓ_2 des nombres réels.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration

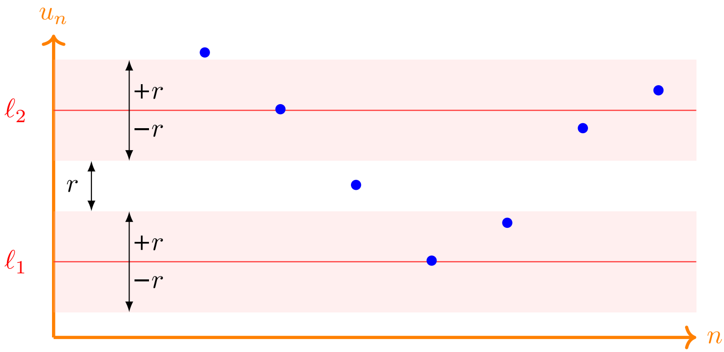
Nous allons utiliser un procédé très classique pour démontrer l'unicité d'un objet mathématique : nous allons supposer qu'il en existe deux, *a priori* distincts, et démontrer qu'ils sont nécessairement égaux.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2.

Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$ en raisonnant par l'absurde.

Supposons donc que $\ell_1 < \ell_2$ et démontrons que cela conduit à une contradiction.
Soit $r = \frac{1}{3}(\ell_2 - \ell_1)$.

L'idée est que nous devrions avoir tous les points de la suite (hormis un nombre fini d'entre eux) dans deux intervalles disjoints ce qui est impossible.
Ci-dessous une représentation graphique des deux intervalles que nous allons considérer : $]\ell_1 - r, \ell_1 + r[$ et $]\ell_2 - r, \ell_2 + r[$.



Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]\ell_1 - r, \ell_1 + r[$. Ainsi pour tout $n \in \ltimes$, si $n \geqslant N_1$ alors

$$\ell_1 - r < u_n < \ell_1 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_1.

De la même façon il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant N_2$ alors :

$$\ell_2 - r < u_n < \ell_2 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_2.

Mais donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, alors :

$$u_n < \ell_1 + r < \ell_2 - r < u_n.$$

Autrement dit :

$$u_n < u_n,$$

ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde que, nécessairement $l_1 = l_2$.

Autrement dit

la limite d'une suite convergente est unique.

■

Remarques.

1. Nous pourrons donc maintenant parler de la limite d'une suite.

Proposition 2

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réelle ℓ.

Soient a et b des réels tels que $a < \ell < b$.

$]a, b[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ donc, par définition de la convergence, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]a, b[$. Donc les termes u_n pour $n \geqslant N$ sont bornés par a et b.

Si maintenant $0 \leqslant n < N$ alors les u_n sont mieux que bornés : ils ont un maximum M et un minimum m, car il y en a un nombre fini.

Le majorant global est donc être $\max(M, b)$ et le minorant $\min(m, a)$.

■

IV Suites divergentes.

1 Cas général.

Définition 3

Nous dirons qu'une suite *diverge* si et seulement si elle ne converge pas.

Remarques.

1. Cette définition recouvre une multitudes de cas possibles. Certains sont étudiés à part. Nous verrons ci-après la divergence avec limite infinie et la divergence avec plusieurs valeurs d'adhérence.

2 Divergence avec limite infinie.

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $+\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Nous avons également la définition en $-\infty$.
   Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $-\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
2. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de terme qui soient plus petits.
3. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est un cas particulier de suite divergente. Voici un schéma qui résume les possibilités lors de l'étude de la convergence d'une suite.

Convergente.

Limite $\pm\infty$.

divergente.

Pas de limite.

Exemples.

1. Démontrons que la suite définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$.

   Soit $A \in \mathbb{R}$.
   Notons $N = \lfloor A \rfloor + 1$.
   Si $n \geqslant N$ alors

$$\begin{aligned} n &\geqslant \lfloor A \rfloor + 1 \\ &> A \end{aligned}$$

   Autrement dit $n \in]A; +\infty[$.
   À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]A, +\infty[$.

   Quelque soit le réel A l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
   Autrement dit :

$$\boxed{(n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

2. La suite arithmétique définie par $u_n = 2n - 3$ diverge vers $+\infty$.
3. La suite arithmétique définie par $u_n = -3n - 5$ diverge vers $-\infty$.

4. ♥ Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. La suite $\left(n^\alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. *confere infra.*
5. ♥ La suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ vers 0. *confere infra.*

Exercice 5.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}.$$

1. Calculez u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturez une expression explicite de u_n, pour n entier supérieur à 1.
3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

3 Divergence sans limite.

Il existe de très nombreuses situations de suites qui divergent sans limite.

Exemples.

1. La suite de terme général $(-1)^n$ définie sur $\mathbb{N}$ diverge sans limite. Si on ne regarde que les terme de rang pair, la suite est constante égale à 1. Pour les rangs impairs elle est constante égale à -1. La suite pourrait avoir plusieurs limites ce qui contredit l'unicité de la limite.
2. $u_n = (-2)^n$. La suite des termes de rang pair admet $+\infty$ pour limite tandis que la suite des termes de rang impair admet pour limite $-\infty$.

Exercice 7. ☣

Soit (u_n) une suite qui admet comme limite finie le réel ℓ.

1. Explicitez les suite numériques :

$$(u_{2n})_{n\geqslant 0} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\geqslant 0}.$$

2. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ admettent aussi comme limite le réel ℓ.
3. (a) Énonce la propriété de la question précédente sous la forme « si ..., alors... ».
   (b) Déduisez-en la contraposée de cette dernière.
4. On pose $u_n = (-1)^n$, pour tout entier naturel n.
   (a) Justifiez que si la suite (u_n) admet une limite alors cette limite est finie.
   (b) Explicitez pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n} et u_{2n+1}.
   (c) Déduisez-en que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ n'admet aucune limite, finie ou infinie.

Exercice 8. ☣

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

1. Explicitez les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en langage courant.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite ℓ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite ℓ.

V Opérations sur les limites.

La définition de la convergence permet d'établir la convergence de quelques suites de référence. Pour le reste nous ferons, ce que nous avions déjà fait pour les fonctions dérivées, à savoir obtenir de nouveaux résultat en combinant ceux déjà connus.

1 Somme.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
P.L.	P.L.	?	?	?

Remarques.

1. Le tableau est symétrique par rapport à sa diagonale.
2. Ces résultats se démontrent avec les définitions des convergences et limites données.
3. Plutôt que d'apprendre par cœur, un peu de bon sens permet de deviner ces résultats.

Exemples.

1. 3 est une suite constante (donc qui converge vers 3) et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 donc $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
2. $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$ donc $\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}\right)$ tend vers $+\infty$.
3. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.

2 Produit.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m = 0$	0	0	0	?	?	P.L.
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
P.L.	P.L.	P.L.	P.L.	?	?	?

Exemples.

1. -2 est une suite constante (donc qui converge vers -2 et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui diverge vers $+\infty$ donc $(-2\times n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} -1\times n^2 = -\infty$.
3. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

Remarques.

1. En combinant ces résultats aux précédents, nous remarquons que les suites convergentes sont stables par combinaisons linéaires : si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors $(\alpha u_n + v_n)$ est convergente. Ce qui signifie que les suites convergentes peuvent être vues comme des vecteurs.

2. Ce résultat nous autorise à passer à la limite dans des égalités. Si (u_n) converge vers ℓ et si, par exemple, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ alors, en passant à la limite $\ell = 2\ell + 3$. C'est une astuce à retenir.

3 Inverse.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous non nuls.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n < 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemples.

1. Nous pouvons, sachant que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, retrouver que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$.
3. Puisque $n^3 + n + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n^3 + n + \frac{1}{n} > 0$: $\frac{1}{n^3+n+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4 Quotient.

Les résultats concernant les suites obtenues comme quotient de deux autres suites découlent des deux points précédents.

5 Exercices.

Exercice 9. ⚽ Déterminer la limite en utilisant les opérations sur les limites.
Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1-2n} - \dfrac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2 + 1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1 - \sqrt{n})$.

Correction de l'exercice 9

a) $+\infty$.
b) $+\infty$.
c) 0.
d) $+\infty$.
e) $+\infty$.
f) $-\infty$.
g) 0.
h) $-\infty$.
i) 0.
j) 0.
k) 2.
l) $-\infty$.
m) $+\infty$.
n) $-\infty$.

Les règles sur les opérations se confrontent souvent à des situations de limite indéterminée.

Pour cette année, le plus efficace est très souvent de factoriser par la plus grande puissance de n apparaissant dans l'expression du terme général de la suite.

Exemples.

1. Si $u_n = n^3 - n$ alors *a priori* c'est une forme indéterminée. Factorisons par n^3 : $u_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Avec cette expression il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{3n+7}$ correspond à une forme indéterminée, mais, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur : $u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{7}{n} = 3$ donc (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination dans cette expression radicale on utilise les expressions conjuguées. $u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.

Exercice 10. ⚽ Limite en levant l'indétermination.

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}$.

h) $u_n = n\sqrt{n^2+3} - n^2$.

i) $u_n = n^2 - 3n$.

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+2}$.

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}$.

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$.

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 10

a) $+\infty$.
b) $+\infty$.
c) $-\infty$.
d) 1.
e) $+\infty$.
f) $\frac{1}{3}$.
g) 0.
h) $+\infty$.
i) $+\infty$.
j) $+\infty$.
k) $+\infty$.
l) $\frac{4}{3}$.
m) 1.
n) $\frac{2}{3}$.
o) 0.
p) 0.
q) $\frac{1}{4}$.
r) $-\infty$.
s) 1.
t) $\frac{1}{6}$.
u) 1.
v) 1. Problème limite sous racine carré.
w) 0.
x) $-\frac{1}{2}$

VI Limites et comparaison.

1 Limites finies.

Proposition 3 - Théorème des gendarmes.

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

et si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell,$$

alors

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Démonstration ☣

Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \in]a, b[$.

De même il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $w_n \in]a, b[$.

Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, $u_n \in]a, b[$ et $v_n \in]a, b[$.

Puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, forcément $v_n \in]a, b[$.

Ainsi quel qu'en soit l'intervalle ouvert $]a, b[$ contenant ℓ, à partir d'un certain rang, cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n).

(v_n) converge vers ℓ.

■

Exercice 11. ⚽ Convergence et comparaison

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :
$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$
2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :
$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$
3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. ⚽ Convergence et comparaison

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$;

d) $u_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{n^2+\sin(n)}{n^2+\cos(n)}$;

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{1+2\sqrt{2n-(-1)^n}}$.

Correction de l'exercice 12

a) $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) En factorisant par n et en utilisant le a) : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

e) En factorisant par n^2 : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

f) En factorisant par $\sqrt{n}$ et en utilisant le théorème des gendarmes pour la limite du dénominateur pour ne pas utiliser de passage à la limite dans la fonction.

Proposition 4 - Passage à la limite dans des inégalités (et égalités).

Soient :

. $a, b \in \mathbb{R}$,

. $\ell \in \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers ℓ.

(i) Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_n \leqslant b \text{ alors } \ell \leqslant b.$$

(ii) Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_n \geqslant a \text{ alors } \ell \geqslant a.$$

(iii) Si, à partir d'un certain rang, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$a \leqslant u_n \leqslant b \text{ alors } a \leqslant \ell \leqslant b.$$

Démonstration ☣

Démontrons, par exemple le (i).

Puisque

■

Remarques.

1. Ce résultat signifie que l'on peut passer à la limite dans une inégalité large.
2. Ce n'est pas vrai avec des inégalités strictes en général.
3. En particulier on retrouve que toute suite convergente est bornée.

2 Limites infinies.

Proposition 5

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

(i) Si, à partir d'un certain rang,
$$u_n \leqslant v_n$$
et si
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
alors
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(ii) Si, à partir d'un certain rang,
$$u_n \leqslant v_n$$
et si
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$
alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Démonstration

(i) ☕Nous devons démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ avec deux hypothèses : (u_n) tend vers $+\infty$ et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n. Nous allons établir que (v_n) vérifient la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (v_n) appartiennent à l'ouvert $]A; +\infty[$.

Nous allons procéder en deux temps : trouver le rang N à partir duquel ça fonctionnera puis montrer qu'effectivement à partir de ce rang tous les termes de (v_n) sont dans l'intervalle. Le N nous sera donné par (u_n).
Puisque (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N pour lequel :
$$\forall n \geqslant N,\ A < u_n.$$

Or, par hypothèse :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n,$$

donc, par transitivité
$$\forall n \geqslant N,\ A < v_n.$$
Autrement dit : $v_n \in]A; +\infty[$.

$$\boxed{(v_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) ☣Il suffit de considérer les suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$.

■

Exemples.

1. $\left(\sin(n) + \mathrm{e}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. ♥ La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 13. ⚽ Limites infinies et comparaisons.
Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n + (-1)^n$;

b) $u_n = n^2 - \sin(n)$;

c) $u_n = \sin\left(\sqrt{2 - \cos^3\left(1 + n^2 - n^n\right)}\right) - n$.

Correction de l'exercice 13

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n - 1 \leqslant u_n$ or $n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n^2 - 1 \leqslant u_n$ or $n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \leqslant 1 - n$ or $-n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

Exercice 14. ✷—

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et} : \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0, \ldots, u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

1.

```
def termessuite(n):
    u=[1]
    for i in range(1,n+1):
        u=u+[u[i-1]+2*(i-1)+3]
    return(u)
```

2. $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, $u_4 = 25$, $u_5 = 36$, $u_6 = 49$, $u_7 = 64$, $u_8 = 81$, $u_9 = 100$, $u_{10} = 121$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la formule de récurrence : $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc

   (u_n) est strictement croissante.

4. (a) Par récurrence.
   Remarquons que dans ce cas nous aurions du mal à définir une fonction f telle que $u_{n+1} = u_n$.
   Clairement : $n^2 + 2n + 3 > n^2$.
   (b) $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n > n^2$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. $u_n = (n+1)^2$.

VII Théorème de la limite monotone.

1 Limite finie.

Proposition 6 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.

(ii) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Démonstration

Remarques.

1. Contrairement au théorème des gendarmes, celui-ci ne permet pas de connaître la limite mais uniquement son existence.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques.
3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant.

Exercice 15.

On considère la suite u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Exercice 16.

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge et montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 17. ☢

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira ; pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{k}.$$

Exercice 18. ☢

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Exercice 19. ☢ Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{=1}^{n} \frac{1}{k^3} = + + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   Écrivez un algorithme qui renvoie une valeur approchée à ε près de la limite de la suite (u_n).

2 Limite infinie.

Proposition 7 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.

(ii) Toute suite réelle décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

(i) ☕
Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (u_n) sont dans $]A, +\infty[$.

Puisque (u_n) n'est pas majorée par A il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_N > A$.
Et comme (u_n) est croissante :

$$\forall n \geqslant N,\ u_n > A.$$

Autrement dit à partir de ce rang N tous les termes de la suite sont dans $]A, +\infty[$.

$$\boxed{(u_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) ☣

■

Exercice 20. ☢

Soit (u_n) a suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.
4. Déterminez avec une machine un entier N tel que $u_N > 10$.

VIII Suites géométriques.

Proposition 8

Soit $q \in \mathbb{R}$.

(i) Si $q = 1$ alors (q^n) est la suite constante égale à 1.
(ii) Si $1 < q$ alors (q^n) diverge en ayant pour limite $+\infty$.
(iii) Si $-1 < q < 1$ alors (q^n) converge vers 0.
(iv) Si $q < -1$ alors (q^n) diverge sans limite ni valeur d'adhérence.
(v) Si $q = -1$ alors (q^n) diverge avec deux valeurs d'adhérence.

Démonstration

☕

■

Exercice 21. ☯

On considère la suite $u(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. On pose pour tout entier naturel n,

   $$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}.$$

   Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique dont donnera le premier terme et la raison.
2. Exprimez alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminez la limite de la suite (v_n) et enfin celle de la suite (u_n).

Exercice 22.

On note $v_0 = -\frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \\ w_n = 2v_n + 6 \end{cases}$$

1. Démontrez que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Déduisez-en les expressions de v_n et w_n en fonction de n entier naturel. Déduisez-en la limite de la suite (v_n).
3. Calculez

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (S_n).

Exercice 23. ☢

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1.$$

1. (a) Démontrez que pour tout entier supérieur ou égale à 3, $u_n \geqslant 0$.

   (b)

```python
def algo(M):
  n=0
  u=1
  while u<M:
    n=n+1
    u=1/2*u+n-1
  return(n)
```

   Programmez cet algorithme puis exécutez-le pour M valant 5, 10, 100 et 1000.

   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement à l'infini de la suite (u_n).

   (d) Montrez que, pour tout entier n supérieur ou égale à 4 :

$$u_n \geqslant n - 2.$$

   (e) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. On définit la suite (v_n) sur $\ltimes$ par :

$$v_n = 4u_n - 8n + 24.$$

   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique strictement décroissante et dont on donnera le premier terme et la raison.

   (b) Démontrez que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6.$$

   (c) Vérifiez que, pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$, où (x_n) est une géométrique et (y_n) une suite arithmétique, dont on précisera pour chacune, le premier terme ainsi que la raison.

   (d) Déduisez-en l'expression de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

   en fonction de n entier naturel.

Exercice 24. ☢

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Prouver que (u_n) est croissante et majorée. Concluez.
Pour la majoration vous démontrerez par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

Exercice 25.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudiez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déduisez des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
4. (a) Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Retrouvez ce résultat en passant à la limite dans la formule de récurrence.

Correction de l'exercice 25

1. Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   * Initialisation.
     Nous voulons vérifier que $\mathscr{P}(1)$ est vraie, autrement dit que $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$. Or $u_1 = 1$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$.
     Ainsi : $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   * Hérédité.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et uniquement $\mathscr{P}(n)$, pas $\mathscr{P}(n+1)$ ni $\mathscr{P}(n-1)$.
     Démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit il faut établir que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
     D'après l'hypothèse de récurrence :

     $$1 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

     Or $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ est une fonction affine strictement croissante puisque son coefficient directeur est strictement positif, donc :

     $$f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2).$$

     Autrement dit :

     $$\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

     Comme de plus $1 \leqslant \frac{3}{2}$ on a bien :

     $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

     $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

* Conclusion.

Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2.}$$

2. Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Nous allons démontrer que $\forall n \in \ltimes^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition de la suite :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n.$$

i.e.

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1. \quad (1)$$

4°
D'après la question précédente, $u_n \leqslant 2$ et donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\times u_n &\geqslant -\frac{1}{2}\times 2 \text{ car } -\frac{1}{2} < 0 \\ -\frac{1}{2}u_n &\geqslant -1 \\ 1 - \frac{1}{2}u_n &\geqslant 1 - 1 \\ -\frac{1}{2}u_n + 1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc par transitivité avec (1) :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

Nous avons démontré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$
Autrement dit :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

Avec une démonstration par récurrence nous aurions pu établir un meilleur résultat : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

4. (a) Démontrons par récurrence que $\mathscr{R}(n)$: « $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   * Initialisation.
     Nous voulons vérifier que $\mathscr{R}(1)$ est vraie, autrement dit que $u_1 = -\frac{1}{2^{1-1}} + 2$.
     Il s'agit de vérifier une égalité : on calcul séparément chaque membre.
     D'une part $u_1 = 1$, d'après l'énoncé, et d'autre part, $-\frac{1}{2^{1-1}} + 2 = 1$ donc $\mathscr{R}(1)$ est vraie.
   * Hérédité.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     Supposons que $\mathscr{R}(n)$ est vraie. Notre hypothèse de récurrence est donc : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.
     Démontrons que $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie. Nous devons donc établir que $u_{n+1} = -\frac{1}{2^n} + 2$.
     Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:
     $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1. \quad (2)$$
     Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$ donc, en substituant dans (2) :
     $$u_{n+1} = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right) + 1.$$
     Donc :
     $$\begin{aligned} u_{n+1} &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \times 2 + 1 \\ &= -\frac{1}{2 \times 2^{n-1}} + 2 \\ &= -\frac{1}{2^n} + 2 \end{aligned}$$
     Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   * Conclusion.
     Nous avons démontré par récurrence que
     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2.}$$

   (b) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique dont la raison est $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Finalement, en utilisant l'expression explicite de (u_n) trouvée à la question précédente :
   $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.}$$

5. Notons ℓ la limite de (u_n).
   En passant à la limite dans la formule de récurrence définissant (u_n) on obtient :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 1.$$

   Cette équation, du premier degré, équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \ell - \frac{1}{2}\ell &= \frac{1}{2}\ell + 1 - \frac{1}{2}\ell \\ \frac{1}{2}\ell &= 1 \\ 2\times\frac{1}{2}\ell &= 2\times 1 \end{aligned}$$

   Finalement

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 2.}$$

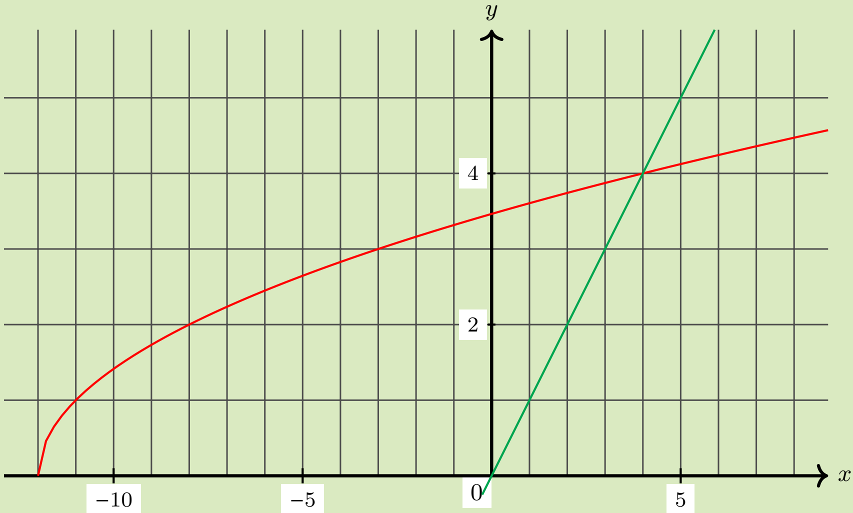
IX Exercices typiques.

Exercice 26.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+12}$.



   Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.
3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 27. ✷—

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).

   (c) Conjecturez son comportement.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0,05(x-20)(x-8).$$

   (a) Pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0,9 \times (8 - v_n).$$

   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0,9^n.$$

   (c) Concluez.

Exercice 28.

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 29.

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1} = 1{,}018 p_n + 16.$$
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?
6. Au bout de combien d'années la population va-t-elle tripler, par rapport à celle de 1969 ?

Exercice 30.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ ar :
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors :
$$u_n \geqslant 0.$$
Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors :
$$u_n \geqslant n - 3.$$
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 31. ✷— Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5};$$

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).

   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.

   (c) Déterminez la imite de la suite (S_n).

Exercice 31. ✷— Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.

Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 32.

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).
   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).
   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en. exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 33. épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

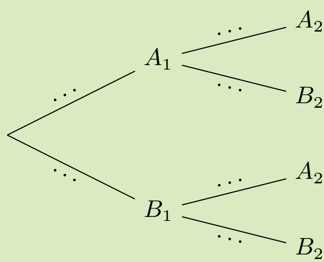
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

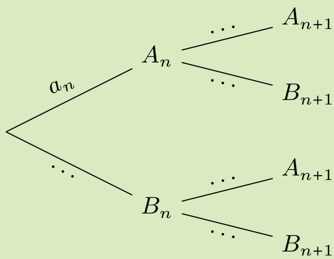
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 33. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

X Un peu plus.

Exercice 34.

Exercice 35. ☣

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1, \ u_1 = \frac{1}{2} \\ \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1. Calculez u_2 et déduisez-en que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculez v_0.
   (b) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) Déduisez-en que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (d) Exprimez vhn en fonction de n entier naturel.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculez w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimez w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   (d) Exprimez w_n en fonction de n entier naturel.
4. Montrez que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} uk = u_0 + \cdots + u_n.$$

   Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 36. ☢

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal 1 :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Les quatre premiers termes de la suite sont : $w_0 = 1$, $w_1 = 3$, $w_2 = 5$ et $w_3 = 7$.

1. Détaillez le calcul permettant d'obtenir w_4.
2. Voici une fonction en Python.

```
def fonction(m):
  n=0
  w=1
  while w!m:
    n=n+1
    w=(n+1)/n*w+1/n
  return(n)
```

   (a) Pour $m = 4\,027$ quelle valeur de n le programme donne-t-il ?

   (b) Quel est l'intérêt de ce programme ?

   (c) En déduire une conjecture de l'expression de w_n en fonction de n.

3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en $w_{2\,013}$.

Exercice 37. ☣ Partie A.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. Peut-on affirmer que pour tout entier n, $u_n \in [-1;1]$.
2. Montrez que si u_0 est un entier pair, alors la suite (u_n) est constante à partir du rang 1.
3. Montrez que si u_0 est impair, alors la suite (u_n) est à valeurs dans $\{-1;1\}$ à partir du rang 1.

Exercice 37. ☣ Partie B.

Dans cette partie on suppose que u_0 n'est pas entier.

4. Établissez le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$.
5. (a) Déduisez-en que, pour tout entier supérieur ou égal à 1, $u_n \in [-1;1]$.
   (b) Déduisez-en que la suite (u_n) est bornée.
   (c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, (u_n) est monotone ?
6. (a) Montrez que si $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, alors :
   $$f(x) \in]-1;0[\cup]0;1[.$$
   (b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, que si u_0 n'est pas entier, alors u_n n'est pas entier.
7. (a) Justifiez que l'image par f de l'intervalle $]0;1[$ est l'intervalle $]-1;0[$, puis que l'image par f de l'intervalle $]-1;0[$ est l'intervalle $]0;1[$.
   (b) Déduisez-en que, quel que soit le rang, la suite (u_n) ne peut être monotone.

Exercice 38. ☣ Partie A.

Exercice 39. ☣

Définition 5

> Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$.

1. Justifiez que la suite (w_n) est décroissante.
2. Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$.
3. Déduisez-en que deux suites adjacentes admettent une même limite finie.

Exercice 40. ☣ Partie B.

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrez que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante.
2. Déduisez-en que les suites $hu_n)$ et (v_n) sont adjacentes.
3. On note e la limite commune des suites.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Expliquez pourquoi $\frac{1}{n \times n!} < \varepsilon$ est une condition suffisante pour que u_n et v_n soient toutes les deux des approximation de e à ε près.
   (b) Expliquez le fonctionnement ainsi que l'utilité de l'algorithme suivant.

```
def fonction(epsilon):
  n=1
  u=2
  v=3
  factoriel=1
  while 1/(n*factoriel)>=epsilon:
    n=n+1
    factoriel=n*factoriel
    u=u+1/factoriel
    v=u+1/(n*factoriel)
  return [n,u,v]
```

   (c) Programmez cet algorithme.
   (d) Quel intérêt y-a-t-il à afficher `u` et `v` ?
   (e) Déduisez-en les premières décimales de e.
4. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$. En utilisant le fait que $u_q < e < v_q$, montrez qu'l'on aboutit à une contradiction.
5. Que concluez-vous ?

XI Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ?

Exercice 41. ☣

Exercice 42. ☣