Généralités sur les suites et démonstration par récurrence.

I Généralités.

1 Définition et notations.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Nous appellerons *suite numérique réelle* toute application

$$u : \{p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots\} \to \mathbb{R}.$$

Remarques.

1. Nous pouvons donc utiliser la notation fonctionnelle pour les suites : $u(n)$. L'usage, respectant en cela l'intuition, lui préfère la notation indicielle : u_n. Mathématiquement les deux notations sont équivalentes. Nous pourrions par exemple noter $(x^2)_{x \in \mathbb{R}}$ la fonction carrée.
2. La plus petite valeur de l'ensemble de définition de la suite n'est pas toujours 0. Autrement dit, le rang du terme initial de la suite n'est pas forcément 0.
3. Si $p \in \mathbb{N}$ est le rang du terme initial d'une suite u alors nous la noterons le plus souvent $(u_n)_{n \geqslant p}$.

Il y a deux façons calculatoires usuelles de définir une suite : de *façon explicite* ou bien *par récurrence*.

Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est définie de façon explicite si il existe une formule de calcul en fonction de n qui permet de calculer les termes de la suite.
Le plus souvent la formule de calcul est associée à une fonction numérique f définie au moins sur $\mathbb{R}_+$. Nous noterons alors $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous dirons qu'une suite est définie par récurrence si les termes de la suite se déterminent en fonction des termes précédents de la suite.
La formule de récurrence est souvent associée à une fonction numérique réelle f telle que : $f(u_n) = u_{n+1}$.

2 Représentations graphiques.

On retrouve deux modes de représentation suivant que la suite est définie de façon explicite ou par récurrence.

Si la suite est définie de façon explicite nous la considérons comme une fonction et nous traçons sa courbe représentative (ici c'est un nuage de points) : le rang n est en indice et le terme u_n en ordonnée.

Si la suite est définie par une formule de récurrence nous la considérons comme une liste infinie de valeurs que nous représentons sur la droites numérique représentant $\mathbb{R}$

Remarques.

1. Rappelons pour une suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ le procédé géométrique qui permet de construire les termes successifs de la suite grâce à la courbe représentative de la fonction f.

   Dans ce cas les deux axes, des ordonnées et abscisses, supportent les termes de la suite : pdf diaporama.

Exercice 1.

Représentez graphiquement les cinq premiers termes des suites définies ci-après.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

a) $u_n = (-2)^n$.

b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 - u_n$.

c) $u_n = -2n + 3$.

d) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

e) $u_n = n^2 - 2n + 3$.

f) $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

g) $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{n}{n-1}$.

h) $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

3 Monotonie.

Les variations d'une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ sont celles de la fonction numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $n \mapsto u_n$.

Il n'est pas possible de calculer de dérivée au sens où nous l'avons vu. Nous allons donc utiliser d'autres procédés.

Par exemple, voici une version discrète de dérivation : nous n'étudions pas le signe de la fonction dérivée mais de $u_{n+1} - u_n$.

Théorème 1

Soient :
. $p \in \mathbb{N}$,
. $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n \geqslant p}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\text{quelque soit } n \geqslant p : \; u_{n+1} - u_n > 0.$$

Remarques.

1. Ce résultat est incontournable en particulier pour les suites définies par récurrence.
2. Ce résultat est en fait une expression simplifiée de la définition générale de fonction strictement croissante pour des fonctions définies sur des entiers naturels.
3. Une analogie avec les suites arithmétiques est possible. Nous regardons si la raison (qui ici est en fait variable), c'est à dire la variation absolue entre deux termes consécutifs est positive ou non. Comme pour les suites arithmétiques : si la raison est positive alors la suite est croissante.

Il est existe d'autres procédés pour démontrer la monotonie d'une suite.

Proposition 1 monotonie et formule explicite.

Soient :
. $p \in \mathbb{N}$,
. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement croissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite $(f(n))_{n \geqslant p}$ est strictement croissante.

Remarques.

1. Nous avons des résultats semblables pour des fonctions diversement monotones : strictement décroissante, croissante et décroissante.
2. Ce résultat signifie que la connaissance de la monotonie de la fonction f permet de connaître celle de $(f(n))_{n \geqslant p}$.
3. La réciproque est fausse.
4. Ce résultat deviendra particulièrement intéressant quand nous saurons étudier les variations d'une fonction grâce à la fonction dérivée.

Nous n'avons pour l'instant pas de méthode pour démontrer la monotonie des suites définies pas récurrence. Il nous manque un procédé de démonstration appelé le raisonnement pas récurrence.

II Démonstration par récurrence.

1 Logique : propositions, assertions.

Dans l'axiomatique classique, le raisonnement par récurrence est un théorème de logique. Cependant nous l'accepterons comme un axiome, un principe.

Une *proposition*, en mathématique, peut désigner un résultat toujours vrai (comme un théorème) ou une phrase (assertion) qui peut être soit vraie soit fausse. Dans la suite de ce chapitre nous l'utiliserons pour désigner une assertion.

Certaines propositions sont des propriétés universelles, c'est-à-dire des propositions qui dépendent d'un élément x appartenant à un ensemble. Ce sont des phrases qui contiennent le plus souvent les expressions « quel que soit » ou « pour tout » ou le quantificateur universel $\forall$.

Pour démonter qu'une proposition universelle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.

Certaines proposition contiennent des implications (appelées aussi conditions nécessaires) le plus souvent sous la forme « si ..., alors ... ».

2 Le théorème du raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer des propriétés universelles, $\mathscr{P}(n)$, qui dépendent d'entiers naturels n.

La montée de l'échelle. Si j'affirme : « si on met un pied sur un barreau de l'échelle, alors on met, obligatoirement, l'autre pied sur le barreau supérieur » alors, pour peu que l'on mette un pied sur le barreau d'en bas il faudra grimper toute l'échelle.

Théorème 2

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors, forcément, $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

<u>Remarques.</u>

1. L'assertion (i) est appelée *l'initialisation*.
2. L'assertion (ii) est appelée *l'hérédité*.
3. L'initialisation commence avec $n = 0$ mais, comme pour les suites, il possible de commencer avec un autre rang.
4. Ce théorème, comme le théorème de Pythagore, est une implication. Pour le théorème de Pythagore il faut d'abord vérifier que ABC est rectangle en A pour pouvoir affirmer que l'égalité $BA^2 + AC^2 = BC^2$. De même pour utiliser le raisonnement par récurrence il faut vérifier que l'initialisation et l'hérédité sont vraies avant de pouvoir affirmer que toutes les assertions sont vraies.
5. L'assertion de l'hérédité contient à la fois une propriété universelle et une implication nous adopterons systématiquement la rédaction :
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   ...
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
6. Lorsqu'on écrit « Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie » on signifie que l'on admet que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Le fait que « $\mathscr{P}(n)$ est vraie » est appelée *l'hypothèse de récurrence.*
7. Le raisonnement par récurrence ne permet pas de trouver un nouveau résultat mais il permet de démontrer qu'une conjecture est vraie.
8. Le raisonnement par récurrence fut mise en évidence par Peano puis Poincaré. Poincaré en parle notamment dans « La science et l'hypothèse. » : lien epub, lien pdf, lien audio.

3 Exercices.

Exercice 2.

Montrez, pour tout entier naturel n, que :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Exercice 3.

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

1. $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
3. $n^3 - n$ est divisible par 3.
4. $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
5. $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 4.

On considère la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « 9 divise } 10^n + 1 \text{ ».}$$

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Exercice 8.

Exercice 9.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

III Un peu plus.

Exercice 10.

On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante :

$$0! = 1 \text{ et } (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égale à 1, $n! = 1 \times \ldots n$.

Exercice 11.

1. Soient $r \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison r.
   (a) En supposant que u_0 est son premier terme, démontrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
   (b) Qu'est-ce que cela change si son premier terme est u_1 ? Démontrez-le.
   (c) Généralisez ce résultat avec comme premier terme u_p pour $p \in \mathbb{N}$.
   (d) Recommencez l'exercice pour les suites géométriques.

Exercice 12.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et } u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n.$$

Exercice 13.

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i.$$

Aide. Pour l'hérédité on utilisera le fait que : $a^{n+1} - a^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$ et $a = (a-b) + b$.

Exercice 14.

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\mathscr{P} : \text{« pour tout } x \in I,\ f(x) \in I \text{ »},$$

alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

Exercice 15.

Soient $f : I \to I$ une fonction une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrez que, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 16.

Exprimez en fonction de n les sommes données.

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(4p-1)$.

b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(3p+5)$.

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

d) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}3\times 5^{-n}$.

e) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}p(p+1)$.

f) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}(p-2)^{2}$.

g) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}3^{2p+1}$.

h) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}3\times 2^{p}-1$.

Exercice 17. ☢

Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ, puis calculez-les.

a) $S = 5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 2\,012$.

b) $T = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \cdots + 2^{20}$.

c) $R = 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots + 10^{10}$.

d) $U = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$.

e) $V = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$, pour $x \in \mathbb{R}$.