Généralités sur les suites et démonstration par récurrence.

I Généralités.

1 Définition et notations.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Nous appellerons *suite numérique réelle* toute application

$$u : \{p,\ p+1,\ p+2,\ \dots\} \to \mathbb{R}.$$

Exemples.

1. La suite arithmétique de terme initial 37 et de raison $\frac{1}{2}$ est l'application
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{1}{2} \times n + 37 \end{array}\right. .$$
2. La suite géométrique de terme initial 7 et de raison $\frac{3}{7}$ est l'application
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 7 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \end{array}\right. .$$
3. L'application qui a tout entier naturel $n \geqslant 3$ associe le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est une suite.
4. L'application qui a tout entier naturel n associe la somme des carrés des chiffres qui compose le nombre n est une suite. Il semble compliquer de trouver une expression explicite pour cette suite.
5. $u : \{0,\ 1,\ 2\} \to \mathbb{R}$ n'est pas une suite car son domaine de définition est fini.

Remarques.

1. Nous pouvons donc utiliser la notation fonctionnelle pour les suites : $u(n)$. L'usage, respectant en cela l'intuition, lui préfère la notation indicielle : u_n. Mathématiquement les deux notations sont équivalentes. Nous pourrions par exemple noter $(x^2)_{x \in \mathbb{R}}$ la fonction carrée.

2. La plus petite valeur de l'ensemble de définition de la suite n'est pas toujours 0. Autrement dit, le rang du terme initial de la suite n'est pas forcément 0.
3. Si $p \in \mathbb{N}$ est le rang du terme initial d'une suite u alors nous la noterons le plus souvent $(u_n)_{n \geqslant p}$.

Il y a deux façons calculatoires usuelles de définir une suite : de *façon explicite* ou bien *par récurrence*.

Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est définie de façon explicite si il existe une formule de calcul en fonction de n qui permet de calculer les termes de la suite.
Le plus souvent la formule de calcul est associée à une fonction numérique f définie au moins sur $\mathbb{R}_+$. Nous noterons alors $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples.

1. La suite arithmétique de terme initial $u_2 = 4$ et de raison 7 est définie de façon explicite par : $u_n = 4 + 7(n - 2)$.
2. $\left(n^2 + 3\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite définie de façon explicite qui est associée à la fonction f : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 3 \end{array} \right.$.
3. Si $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 8}$ alors $(f(n))_{n \geqslant 3}$ est une suite définie de façon explicite.
4. $\left(7^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite définie de façon explicite bien que nous ne puissions pas, pour l'instant l'associer à une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

Nous dirons qu'une suite est définie par récurrence si les termes de la suite se déterminent en fonction des termes précédents de la suite.
La formule de récurrence est souvent associée à une fonction numérique réelle f telle que : $f(u_n) = u_{n+1}$.

1. La suite géométrique de terme initial $u_7 = 3$ et de raison $q = 5$ est donnée par la formule de récurrence : $u_{n+1} = 7 \times u_n$ pour tout $n \geqslant 7$. Autrement dit : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto 7x$.
2. La suite de Fibonacci est définie par $u_0 =$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Remarquons avec cet exemple qu'une formule de récurrence peut lier plus de termes de rangs différents de la suite. Nous dirons que la suite de Fibonacci est une suite récurrente d'ordre 2.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est définie par récurrence.

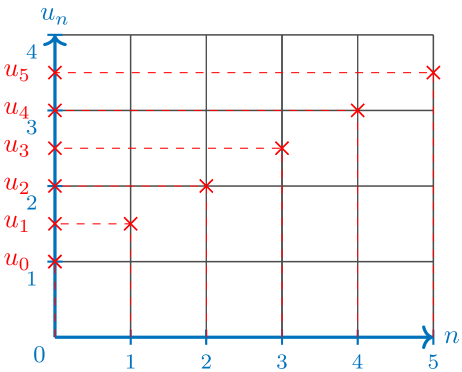
2 Représentations graphiques.

On retrouve deux modes de représentation suivant que la suite est définie de façon explicite ou par récurrence.

Si la suite est définie de façon explicite nous la considérons comme une fonction et nous traçons sa courbe représentative (ici c'est un nuage de points) : le rang n est en indice et le terme u_n en ordonnée.

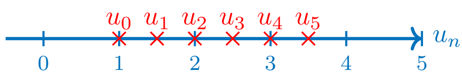
Exemples.

1. La suite arithmétique définie par $u(n) = 0,5n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est représentée par :



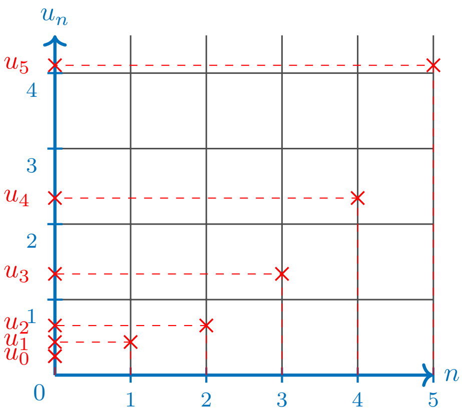
Si la suite est définie par une formule de récurrence nous la considérons comme une liste infinie de valeurs que nous représentons sur la droites numérique représentant $\mathbb{R}$

1. La suite arithmétique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 0,5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est représentée par :

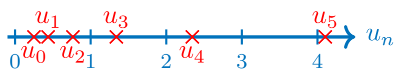


La représentation obtenue est tout simplement l'axe des ordonnées de la représentation à gauche.

2. La suite géométrique définie par $v(n) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est représentée par :



2. La suite géométrique définie par $v_0 = \frac{1}{4}$ et $v_{n+1} = \frac{3}{2} \times v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est représentée par :



Remarques.

1. Rappelons pour une suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ le procédé géométrique qui permet de construire les termes successifs de la suite grâce à la courbe représentative de la fonction f.

   Dans ce cas les deux axes, des ordonnées et abscisses, supportent les termes de la suite : pdf diaporama.

Exercice 1.

Représentez graphiquement les cinq premiers termes des suites définies ci-après.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

a) $u_n = (-2)^n$.

b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 - u_n$.

c) $u_n = -2n + 3$.

d) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

e) $u_n = n^2 - 2n + 3$.

f) $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

g) $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{n}{n-1}$.

h) $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

3 Monotonie.

Les variations d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sont celles de la fonction numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $n \mapsto u_n$.

Il n'est pas possible de calculer de dérivée au sens où nous l'avons vu. Nous allons donc utiliser d'autres procédés.

Par exemple, voici une version discrète de dérivation : nous n'étudions pas le signe de la fonction dérivée mais de $u_{n+1} - u_n$.

Théorème 1

Soient :

. $p \in \mathbb{N}$,

. $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n \geqslant p}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\text{quelque soit } n \geqslant p : \; u_{n+1} - u_n > 0.$$

Démonstration

Rappelons la définition de fonction strictement croissante. Une fonction f est strictement croissante si et seulement si pour tous nombres a et b choisis dans son ensemble de définition si $a < b$ alors, forcément, $f(a) < f(b)$.

Notons $\mathscr{D}_p = \{p;\ p+1;\ \ldots\}$.

* Soit n$\geqslant p$ un entier naturel.
  Si u est une fonction strictement croissante sur $\mathscr{D}_p$, alors par définition de la croissance : quelque soient a et b dans $\mathscr{D}_p$, si $a < b$ alors $u(a) < u(b)$.
  En particulier pour $a = n$ et $b = n+1$: $u(n) < u(n+1)$.
  Autrement dit : $0 < u(n+1) - u(n)$.
* Supposons que, quelque soit $n \geqslant p$, $u_{n+1} > u_n$ et démontrons que u est strictement croissante.
  Soient $a < b$ deux éléments de $\mathscr{D}_p$. Nous avons de proche en proche : $u(a) < u(a+1) < u(a+2) < \cdots < u(b)$.
  Ainsi u est strictement croissante.

■

Exemples.

1. Afin de connaître le sens de variation de la suite définie, pour tour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ nous devons étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Soit donc $n \in \mathbb{N}$.
   Comme $u_{n+1} = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

   Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$ et $u_0 = 0$ est strictement croissante puisque, quelque soit le $n \in \mathbb{N}$ choisi nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 1$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, pour tout entier naturel n. Et par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Remarques.

1. Ce résultat est incontournable en particulier pour les suites définies par récurrence.
2. Ce résultat est en fait une expression simplifiée de la définition générale de fonction strictement croissante pour des fonctions définies sur des entiers naturels.
3. Une analogie avec les suites arithmétiques est possible. Nous regardons si la raison (qui ici est en fait variable), c'est à dire la variation absolue entre deux termes consécutifs est positive ou non. Comme pour les suites arithmétiques : si la raison est positive alors la suite est croissante.

Il est existe d'autres procédés pour démontrer la monotonie d'une suite.

Proposition 1 monotonie et formule explicite.

Soient :

. $p \in \mathbb{N}$,

. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement croissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite $(f(n))_{n \geqslant p}$ est strictement croissante.

Démonstration

Soit n un entier naturel avec $n \geqslant p$.

Puisque f est strictement croissante et $n < n+1$, $f(n) < f(n+1)$. Autrement dit : $f(n+1) - f(n) > 0$.

Donc $(f(n))$ est strictement croissante.

■

Exemples.

1. $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
3. $\left(n^2-6n-15\right)_{n\geqslant 3}$ est strictement croissante car la fonction $f: x\mapsto x^2-6x-15$ est strictement croissante sur $[3;+\infty[$ (d'après son tableau de variation obtenu avec la forme canonique ou l'étude du signe de f').
4. Nous ne pouvons étudier la monotonie de la suite $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est pourtant donnée par une formule explicite, car nous ne connaissons par de fonction « $x\mapsto 2^x$ ».
5. La réciproque est fausse. La suite $\left(\left(n-\frac{1}{4}\right)^2+1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et pourtant la fonction $f: x\mapsto \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+1$ n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$.

Remarques.

1. Nous avons des résultats semblables pour des fonctions diversement monotones : strictement décroissante, croissante et décroissante.
2. Ce résultat signifie que la connaissance de la monotonie de la fonction f permet de connaître celle de $(f(n))_{n\geqslant p}$.
3. La réciproque est fausse.
4. Ce résultat deviendra particulièrement intéressant quand nous saurons étudier les variations d'une fonction grâce à la fonction dérivée.

Nous n'avons pour l'instant pas de méthode pour démontrer la monotonie des suites définies pas récurrence. Il nous manque un procédé de démonstration appelé le raisonnement pas récurrence.

II Démonstration par récurrence.

1 Logique : propositions, assertions.

Dans l'axiomatique classique, le raisonnement par récurrence est un théorème de logique. Cependant nous l'accepterons comme un axiome, un principe.

Une *proposition*, en mathématique, peut désigner un résultat toujours vrai (comme un théorème) ou une phrase (assertion) qui peut être soit vraie soit fausse. Dans la suite de ce chapitre nous l'utiliserons pour désigner une assertion.

Exemples.

1. La proposition « le carré de -3 est négatif » est fausse.
2. La proposition $\mathscr{P}$: « $\sqrt{2}$ est irrationnel » est vraie.
3. La négation de la proposition $\mathscr{P}$: « $x\geqslant 5$ » est $\overline{\mathscr{P}}$: « $x<5$ ».

Certaines propositions sont des propriétés universelles, c'est-à-dire des propositions qui dépendent d'un élément x appartenant à un ensemble. Ce sont des phrases qui contiennent le plus souvent les expressions « quel que soit » ou « pour tout » ou le quantificateur universel $\forall$.

Pour démonter qu'une proposition universelle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemples.

1. La proposition $\mathscr{P}(x)$: « $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est vraie quel que soit $x \in]0;1[$.
2. « Pour tout $x \in]0;2[$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est fausse puisque, par exemple, pour $x = 1$, on a $\frac{1}{1} = \frac{1}{1^2}$.
3. L'assertion $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est un multiple de 3. » est vraie pour tout nombre entier naturel n. Cependant la démonstration n'est pour l'instant pas aisée.

Certaines proposition contiennent des implications (appelées aussi conditions nécessaires) le plus souvent sous la forme « si ..., alors ... ».

Exemples.

1. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est impair alors n^2 est impair. » est une assertion qui est vraie.
   Démontrons-le.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que n est impair et démontrons qu'alors forcément n^2 est aussi impair.
   Puisque n est impair il peut s'écrire $n = 2k + 1$ où k est un certain entier.
   Donc :
$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 \\ &= 2 \times (2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$
   Ainsi n^2 est de la forme $2p + 1$ où p est un nombre entier. Autrement dit n^2 est impair.
   Concluons : nous avons démontré que, quel que soit l'entier n, si n est impair, alors, nécessairement, n^2 est aussi impair.
2.

2 Le théorème du raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer des propriétés universelles, $\mathscr{P}(n)$, qui dépendent d'entiers naturels n.

La montée de l'échelle. Si j'affirme : « si on met un pied sur un barreau de l'échelle, alors on met, obligatoirement, l'autre pied sur le barreau supérieur » alors, pour peu que l'on mette un pied sur le barreau d'en bas il faudra grimper toute l'échelle.

Théorème 2

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors, forcément, $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

Remarques.

1. L'assertion (i) est appelée *l'initialisation*.
2. L'assertion (ii) est appelée *l'hérédité*.
3. L'initialisation commence avec $n = 0$ mais, comme pour les suites, il possible de commencer avec un autre rang.
4. Ce théorème, comme le théorème de Pythagore, est une implication. Pour le théorème de Pythagore il faut d'abord vérifier que ABC est rectangle en A pour pouvoir affirmer que l'égalité $BA^2 + AC^2 = BC^2$. De même pour utiliser le raisonnement par récurrence il faut vérifier que l'initialisation et l'hérédité sont vraies avant de pouvoir affirmer que toutes les assertions sont vraies.
5. L'assertion de l'hérédité contient à la fois une propriété universelle et une implication nous adopterons systématiquement la rédaction :

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   ...

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
6. Lorsqu'on écrit « Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie » on signifie que l'on admet que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Le fait que « $\mathscr{P}(n)$ est vraie » est appelée *l'hypothèse de récurrence.*
7. Le raisonnement par récurrence ne permet pas de trouver un nouveau résultat mais il permet de démontrer qu'une conjecture est vraie.

8. Le raisonnement par récurrence fut mise en évidence par Peano puis Poincaré. Poincaré en parle notamment dans « La science et l'hypothèse. » : lien epub, lien pdf, lien audio.

Exemples.

1. Démontrer une propriété.
   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est divisible par trois ».

   Démontrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

   * Initialisation. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Autrement dit que $4^0 - 1$ est divisible par 3.
     $4^0 - 1 = 0$ et $3 \times 0 = 0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ st vraie.
   * Hérédité.
     Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Nous devons donc démontrer que $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3.

     $$4^{n+1} - 1 = 4 \times (4^n - 1) + 3$$

     D'après l'hypothèse de récurrence : $3 | 4^n - 1$.
     Autrement dit il est possible d'écrire : $4^n - 1 = 3 \times k$ où k est un nombre entier.
     Donc

     $$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 3k + 3 \\ &= 3(4k+1) \end{aligned}$$

     Autrement dit $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.
     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Nous avons démontré en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

   $$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3.}$$

2. Démontrer une formule. Ici la somme des entiers naturels jusqu'à n.
   Soit $\mathscr{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

   Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- $0 = \frac{0\times 1}{2}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = n+1+\sum_{k=0}^{n} k$$

  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= n+1+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2}\\ &= \frac{(2+n)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

3. Démontrer la formule explicite du terme terme général d'une suite.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.

   Nous souhaitons démontrer que $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Notons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ ».

   Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   *

4. Démontrer qu'une suite définie par récurrence est croissante.

   Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

5. Démontrer un encadrement.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.

   Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

6. Démontrer une inégalité.
   Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $2n + 1 \leqslant 2^n$ » est vraie.

7. De la nécessité de l'initialisation.
   $\mathscr{P}(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 ».

   * Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 1 = 3k$ donc :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times (4^n + 1) - 4 + 1 \\ &= 4 \times 3k - 3 \\ &= 3(4k - 1) \end{aligned}$$

     Autrement dit $4^{n+1} + 1$ est divisible par 3.
   * $4^0 + 1 = 1$ et $3 \nmid 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est fausse.

   Nous remarquons que l'hérédité ne suffit pas à démontrer que toutes les propositions sont vraies.
   Nous pourrions même démontrer par l'absurde que 4^n+1 n'est jamais divisible par 3.

8. Inégalité de Bernoulli.
   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}(n)$: « ♥ pour tout nombre $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. »

   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     D'une part : $(1+x)^0 = 1$
     d'autre part : $1 + 0 \times x = 1$,
     donc : $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0 \times x$.
     $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Puisque $(1+x) \geqslant 0$:

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+x)(1+nx)$$

En développant le membre de droite :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2 \quad (1)$$

Or, puisque $nx^2 \geqslant 0$,

$$1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x \quad (2)$$

donc, par transitivité entre (1) et (2) :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$

Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1=x)^n \geqslant 1+nx.}$$

3 Exercices.

Exercice 2.

Montrez, pour tout entier naturel n, que :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Correction de l'exercice 2

a) Quelques éléments pour l'hérédité.
$\mathscr{P}(n+1)$ est une égalité, donc de la forme $A = B$. Pour la démontrer nous transformer l'écriture de A et de B en montrant $A = C$ et $B = C$ pour conclure $A = B$.
D'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n^2+2n+1) + (n^2+n)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

b) Pour démontrer l'hérédité il faut établir une égalité $A = B$. Nous allons partir de B et en développant astucieusement faire apparaître A.

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{(n+1)n+(n+1)2}{2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\right]^2\end{aligned}$$

En dévellopant avec une identité remarquable :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + n(n+1)(n+1)+(n+1)^2$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = n(n+1)^2+1\times(n+1)^2+\sum_{i=0}^{n} i^3$$

En factorisant :

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 &= (n+1)(n+1)^2+\sum_{i=0}^{n} i^3 \\ &= (n+1)^3+\sum_{i=0}^{n} i^3 \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} i^3\end{aligned}$$

Exercice 3. ⚽

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

1. $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7.
3. n^3-n est divisible par 3.
4. 4^n-1-3n est divisible par 9.
5. $7\times 3^{5n}+4$ est divisible par 11.

Correction de l'exercice 3

1.

$$\begin{aligned}2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2} &= 2^{n+5}+3^{3n+5}\\ &= 2\times 2^{n+4}+3^{3n+5}\end{aligned}$$

Astuce :

$$\begin{aligned}2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2} &= 2\times 2^{n+4}+2\times 3^{3n+2}-2\times 3^{3n+2}+3^{3n+5}\\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right)-2\times 3^{3n+2}+3^{3}\times 3^{3n+2}\\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right)+\left(-2+3^{3}\right)\times 3^{3n+2}\\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right)+25\times 3^{3n+2}\end{aligned}$$

25 est divisible par 5 et, d'après l'hypothèse de récurrence $2^{n+4}3^{3n+2}$ est divisible par 5 donc $2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2}$ est divisible par 5.

2.

$$\begin{aligned}3^{6(n+1)+2}-2 &= 3^{6}\times 3^{6n+2}-2\\ &= 3^{6}\times(3^{6n+1}-2)+3^{6}\times 2-2\\ &= 3^{6}\times(3^{6n+1}-2)+3^{6}\times 2-2\\ &= 3^{6}\times(3^{6n+1}-2)+7\times 208\end{aligned}$$

3. Version brève : $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs et l'un de ces facteurs est forcément multiple de 3.

$$\begin{aligned}(n+1)^{3}-(n+1) &= n^{3}+3n^{2}+3n+1-n-1\\ &= n^{3}-n+3(n^{2}-n)\end{aligned}$$

Or $3(n^{2}-n)$ est divisible par 3 et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n^{3}-n$ est divisible par 3 donc $(n+1)^{3}-(n+1)$ est divisible par 3.

4.

$$\begin{aligned}4^{n+1}-1-3(n+1) &= 4\times 4^{n}-1-3(n+1)\\ &= 4\times(4^{n}-1-3n)+4+12n-1-3(n+1)\\ &= 4\times(4^{n}-1-3n)+9n\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}7\times 3^{5(n+1)}+4 &= 7\times 3^{5}\times 3^{5n}+4\\ &= 3^{5}\times(7\times 3^{5n}+4)-3^{5}\times 4+4\\ &= 3^{5}\times(7\times 3^{5n}+4)-968\\ &= 3^{5}\times(7\times 3^{5n}+4)-88\times 11\end{aligned}$$

Exercice 4.

On considère la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « 9 divise } 10^n + 1 \text{ ».}$$

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Correction de l'exercice 4

1.
$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 \\ &= 10 \times (10^n + 1) - 9 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 10^0 + 1 &= 2 \\ 10^1 + 1 &= 11 \\ 10^2 + 1 &= 101 \\ 10^3 + 1 &= 1001 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10(10^n - 1) + 10 - 1 \\ &= 10(10^n - 1) + 9 \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

   Supposons que $10^n + 1$ est divisible par 9. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n + 1 = 9k$. D'autre part, d'après les questions précédentes $10^n - 1$ es divisible par 9 donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n - 1 = 9p$.
   On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} 10^n + 1 - (10^n - 1) &= 9k - 9p \\ 2 &= 9(k - p) \end{aligned}$$

   Donc 2 est divisible par 9 ce qui est absurde car : $0 < 2 < 9$.

   Nous avons démontré par l'absurde que 10^+1 n'est pas divisible par 9, et ce, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Correction de l'exercice 5

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right),$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}\left[5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\right] + 3$$

À ce stade nous avons obtenu une formule explicite de u_{n+1}. Mais la présentation n'est pas tout à fait celle désirée. Modifions-la.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2 - 5 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 3 \\
&= 5 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\
&= 5 \times 1 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\
&= 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Correction de l'exercice 6

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n - (n+1) \quad (1).$$

Cette formule de récurrence a été obtenue en remplaçant n pa $n+1$ dans la formule de l'énoncé : pas de difficulté puisque cette formule est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 2\left(2^{n-1}+1\right)+n,$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2\left[\left(2^{n-1}+1\right)+n\right]-(n+1) \\ &= 2 \times 2 \times 2^{n-1} + 4 + 2n - n - 1 \\ &= 2 \times 2^n + 2 + n \\ &= 2(2^n+1)+n \end{aligned}$$

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Correction de l'exercice 7

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2},$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3\left[\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right] + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{6}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3n}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-3-3n+2n+2}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-n-1}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 8.

Exercice 9.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

Correction de l'exercice 9

1. $u_0 = u_1 = u_2 = \frac{1}{4}$.
2. (u_n) semble être constante égale à $\frac{1}{4}$.
3. Démonstration par récurrence.
   Pour l'hérédité :

$$u_{n+1} = 5u_n - 1$$

D'arès l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 \times \frac{1}{4} - 1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

III Un peu plus.

Exercice 10.

On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante :

$$0! = 1 \text{ et } (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égale à 1, $n! = 1 \times \ldots n$.

Exercice 11.

1. Soient $r \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison r.
   (a) En supposant que u_0 est son premier terme, démontrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
   (b) Qu'est-ce que cela change si son premier terme est u_1 ? Démontrez-le.
   (c) Généralisez ce résultat avec comme premier terme u_p pour $p \in \mathbb{N}$.
   (d) Recommencez l'exercice pour les suites géométriques.

Exercice 12. ☢

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et } u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n.$$

Exercice 13. ☣

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i.$$

Aide. Pour l'hérédité on utilisera le fait que : $a^{n+1} - a^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$ et $a = (a-b) + b$.

Exercice 14. ☢

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\mathscr{P} : \text{ « pour tout } x \in I,\ f(x) \in I \text{ »},$$

alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

Exercice 15. ☢

Soient $f : I \to I$ une fonction une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrez que, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 16.

Exprimez en fonction de n les sommes données.

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(4p-1)$.

b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(3p+5)$.

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

d) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}3\times 5^{-n}$.

e) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}p(p+1)$.

f) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}(p-2)^2$.

g) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}3^{2p+1}$.

h) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}3\times 2^{p}-1$.

Exercice 17.

Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ, puis calculez-les.

a) $S = 5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 2\,012$.

b) $T = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \cdots + 2^{20}$.

c) $R = 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots + 10^{10}$.

d) $U = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$.

e) $V = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$, pour $x \in \mathbb{R}$.