Concentration, loi des grands nombres.

Inégalités de concentration.

Proposition 1. *Inégalité de Markov.* Soit X une variable aléatoire réelle positive. Pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Exemples.

1. Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.
   Majorons la probabilité que la production dépasse 75 pièces quotidiennes.
   $\mathbb{P}(X > 75) =\leqslant \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$.

EXERCICE 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Montrez que, pour tout $c \in]\!]0,n[\![$: $\frac{\mathbb{E}(X)-c}{n-c} \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)-1}{c-1}$.

Théorème 1.*Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.* Soit X une variable aléatoire réelle finie. On note $\mu := \mathbb{E}(X)$ et $V := \mathbb{V}(X)$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant x) \leqslant \frac{V}{x^2}$.

Démonstration.

* Dans le cas fini.
  Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $A = \{|X-\mu| > x\}$ est fini et on peut en noter a_1, ..., a_k (avec $k \in [\![1,n]\!]$) les éléments ou $A = \varnothing$. Dans ce dernier cas le résultat est évident.

$$\mathbb{V}(X) = (x_1-\mu)^2\mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + (x_n-\mu)^2\mathbb{P}(X = x_n)$$

et nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}(X) \geqslant (a_1-\mu)^2\mathbb{P}(X = a_1) + \cdots + (a_k-\mu)^2\mathbb{P}(X = a_k)\\
&\mathbb{V}(X) \geqslant x^2\mathbb{P}(X = a_1) + \cdots + x^2\mathbb{P}(X = a_k)\\
&\mathbb{V}(X) \geqslant x^2\left[\mathbb{P}(X = a_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = a_k)\right]\\
&\mathbb{V}(X) \geqslant x^2\mathbb{P}(X \in A)\\
&\frac{\mathbb{V}(X)}{x^2} \geqslant \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

* En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ et $a = x^2$.

Exemples.

1.
   Représentation graphique de la fonction de probabilité avec la fonction

   Loi binomiale $\mathscr{B}(4; 0{,}5)$.
2. Loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
3. Pour $x = 2\sigma$ on a $\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant \frac{V}{4\sigma^2} = \frac{1}{4}$. Autrement dit la probabilité pour qu'une variable aléatoire prenne une valeur de plus du double de son écart-type est inférieur à 0,25.
4. Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée suit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.
   Majorons la probabilité que la production dépasse 74 pièces quotidiennes.
   $\mathbb{P}(X > 74) = \mathbb{P}(X - 50 > 24) \leqslant \mathbb{P}(|X-50| \geqslant 25) \leqslant \frac{25}{25^2} = \frac{1}{25}$.
   On remarque que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est plus fine que celle de Markov. C'est pourquoi elle sera en général privilégiée.

5. On lance 800 fois une pièce non truquée.
Donnons une minoration de la probabilité que le nombre de piles obtenus soit compris entre 381 et 419.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(381 \leqslant X \leqslant 419) &= \mathbb{P}(381-400 \leqslant X-400 \leqslant 419-400)\\ &= \mathbb{P}(-19 \leqslant X-400 \leqslant 19)\\ &= \mathbb{P}(|X-400| \leqslant 19)\\ &= 1-\mathbb{P}(|X-400| > 19)\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-400| \geqslant 20) &\leqslant \frac{800\times 0{,}5\times 0{,}5}{20^2}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(381 < X < 419) \geqslant 1-\frac{1}{2}$$

Remarques.

1. Nous retrouvons l'idée que les valeurs de la variable aléatoire s'éloigne d'environ σ de l'espérance : $\mathbb{P}\left(|X-\mu| > x\right) \leqslant \left(\frac{\sigma}{x}\right)^2$.
2. $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant x) = 1-\mathbb{P}(\mathbb{E}(X)-x < X < \mathbb{E}(X)+x)$. L'intervalle $[\mathbb{E}(X)-x;\mathbb{E}(X)+x]$ est appelé un intervalle de fluctuation de X.

EXERCICE 2. On lance 3 600 fois une pièce non truquée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans ce cas.
2. Minorez la probabilité que le nombre d'apparition de piles soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

Exercice 2.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(3600;0{,}5)$ donc $\mu = 3600\times 0{,}5 = 1800$ et $V = np(1-p) = 900$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant x) \leqslant \frac{np(1-p)}{x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 1800) \leqslant \frac{900}{x^2}$.
2. $\mathbb{P}(1600 < X < 2000) = \mathbb{P}(|X-1800| < 200) = 1-\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 200)$ or $\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 200) \leqslant \frac{900}{200^2} = 0{,}0225$ donc $1-\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 200) \geqslant 1-0{,}0225 = 0{,}9775$.

EXERCICE 3. On note X le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport sur le créneau horaire 14h-15h. On estime qe $\mathbb{E}(X) = 16$ et $\mathbb{V}(X) = 4$.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14h et 15h.

EXERCICE 4. On considère une variable aléatoire X l'espérance μ et d'écart-type σ.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez les valeurs de σ pour que nous ayons $\mathbb{P}\left(|X-\mu| < 15\right) \geqslant 0{,}96$.

EXERCICE 5. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'objets produits par une entreprise. On sait que $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\mathbb{V}(X) = 25$.

1. (a) Justifiez que $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \leqslant \mathbb{P}\left(|X-50| \geqslant 25\right)$.

(b) Majorez la probabilité que la production du mois à venir dépasse 75 objets.

2. Minorez la probabilité que la production du mois à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 matelas.

EXERCICE 6. Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Sans les passagers, ni les bagages, mais avec l'équipage et le carburant il pèse 120 tonnes. Les consignes de sécurité interdisent le décollage de l'appareil si le poids dépasse 129,42 tonnes. Les 100 places sont occupées.

Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance 20 kg et d'écart-type 10 kg. Toutes ces variables sont supposées indépendantes.

1. (a) Calculez l'espérance du poids de l'avion au décollage.
   (b) L'espérance calculée est-elle conforme aux normes de sécurité ?
2. Calculez l'écart-type du poids total de l'appareil.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez un majorant de la probabilité pour que le poids réel de l'appareil au décollage dépasse 129,42 tonnes.

Proposition 2. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Quel que soit x réel, $\mathbb{P}\left(|M_n - \mu| \geqslant x\right) \leqslant \frac{V}{nx^2}$.

Démonstration. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| > x) \leqslant \frac{\mathbb{V}(M_n)}{x^2}$$

or $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(M_n) = \frac{\mathbb{V}(X)}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant x) \leqslant \frac{V}{nx^2}$$

EXERCICE 7. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Notons X la variable aléatoire qui à un tirage associe 1 si boule tirée est rouge et 0 sinon. Notons encore M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ puis donnez l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. À partir de quel nombre de tirages pouvons-nous garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement entre 0,35 et 0,45.

Exercice 7.

1.
2. $\mathbb{P}(0{,}35 < M_n < 0{,}45) = \mathbb{P}(-0{,}05 < M_n - 0{,}4 < 0{,}5) = \mathbb{P}(|M_n - 0{,}4) < 0{,}05) = 1 - \mathbb{P}(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}05)$. Donc $\mathbb{P}(0{,}35 < M_n < 0{,}45) > 0{,}95 \iff \mathbb{P}(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}05) < 0{,}05$ or $\mathbb{P}(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{0{,}24}{n0{,}05^2}$ donc il suffit que $\frac{0{,}24}{n0{,}05^2} < 0{,}05$ et donc que $n > 1920$.

EXERCICE 8. Une épreuve consiste à tirer au hasard 10 jetons avec remise dans un sac contenant 40 % de jetons bleus. On appelle X la variable aléatoire qui, à cette série de tirages, associe le nombre de jetons bleus obtenus.

1. (a) Justifiez que X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.
   (b) Déterminez l'espérance de X.
   (c) Montrez que la variance de X est 2,4.
2. Montrez en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $\mathbb{P}(|X - 4| \geqslant 2) \leqslant 0{,}6$.
3. (a) Quel est l'événement contraire de l'événement $\{|X - 4| \geqslant 2\}$?

(b) Montrez que $\mathbb{P}(|X-4|<2) \geqslant 0{,}4$.

EXERCICE 9. Soit T la variable aléatoire qui à chaque enfant français de 1 an associe sa taille en centimètre.

Des statistiques permettent d'estimer que cette variable a pour espérance 50 et pour écart-type 2.

1. Déterminez l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de T de taille 10 000.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorez la probabilité que cette taille moyenne s'écarte de 50 cm d'au moins 0,1 cm.

EXERCICE 10.
0ieme bordas indice 2020 page 416 exo 80

Loi faible des grands nombres.

Proposition 3. - Théorème de la loi faible des grands nombres.
Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|M_n-\mu| \geqslant x\right) = 0.$$

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
D'après l'inégalité de concentration :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|M_n-\mu| \geqslant x) \leqslant \frac{V}{nx^2}$$

nous concluons grâce au théorème des gendarmes.

Remarques.

1. La probabilité que la moyenne des valeurs d'un échantillon s'éloigne de l'espérance de la variable aléatoire diminue à mesure que l'échantillon croît.

   Cette décroissance est rapide puisque de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$.
2. Pour un pile-ou-face dont pile est le succès : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et la probabilité que le nombre moyen de pile s'éloigne de p de n'importe quelle longueur x tend vers 0 lorsque la taille de l'échantillon augmente. On peut obtenir la précision (en probabilité) que l'on veut en augmentant la taille de l'échantillon.
3. C'est un résultat très important puisqu'il fait la passerelle (que nous considérons souvent comme intuitive) entre les statistiques et les probabilités.

   Si dans un sondage 20 % répondent oui, nous avons l'intuition que la probabilité de choisir au hasard une personne répondant oui est de 0,2.

   Si je lance un grand nombre de fois une pièce et que j'obtiens en moyenne presque 0,5 je peux affirmer que la pièce est équilibrée.

Exercices.

EXERCICE 11.

0ieme bordas indice 2020 page 416 exo 78

On définit le sex-ratio d'une population comme le rapport du nombre de naissances de garçons sur le nombre de naissance de filles. Pour la population mondiale il est de 1,5. Pour la Chine il est de 1,13 (données 2019).

1. Montrez que la proportion p_m de naissances féminines pour la population mondiale est 0,488 à 10^{-3} près, et que cette proportion p_c pour la Chine est 0,469 à 10^{-3} près.
2.

EXERCICE 12.

0ieme bordas indice 2020 page 417 exo 83

EXERCICE 13.

0ieme bordas indice 2020 page 417 exo 85

EXERCICE 14.

0ieme bordas indice 2020 page 417 exo 86

EXERCICE 15. On souhaite estimer l'équilibre d'une pièce. On note p la probabilité (inconnue) que la pièce tombe sur pile. On lance n fois la pièce et on note S_n le nombre de lancers ayant donné pile. À partir de combien de lancers peut-on supposer que $\frac{S_n}{n}$ est une approximation de p à 0,01 près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

EXERCICE 16. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$.

EXERCICE 17. *Les parties* A *et* B *sont indépendantes.*

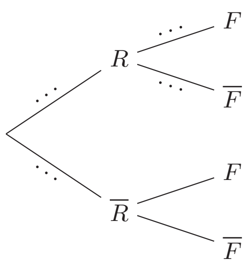
Partie A Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité. Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1.
   (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0{,}38$. Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.
   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions. On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000. On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée. On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
   Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

EXERCICE 18.

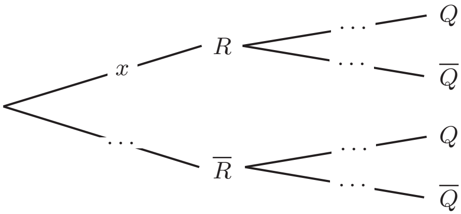
La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ». Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

— 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
— 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen. On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ». Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire. Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à $\mathbf{10^{-3}}$ près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Montrer que $x = 0{,}9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0{,}615)$.
   La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0{,}615)$.
   Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}473\,55$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous. « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

EXERCICE 19. *Les deux parties sont indépendantes.*

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres. On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. *On arrondira les résultats à* 10^{-3} *près.*
   (a) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
   (b) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».
   Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé. On considère la variable aléatoire S définie par : $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}$. On admet que les variables aléatoires $M_1,\ M_2,\ \ldots,$ M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.
   Montrer que : $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
   (a) Montrer que cette condition est équivalente à :
   $$P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant 0{,}1.$$
   (b) En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

EXERCICE 20. Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(B) = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

(a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

(b) Calculer $P(X = 8)$.

(c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.

(d) Calculer l'espérance de X.

(e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?