

Variables aléatoires et moments.

Notion de variable aléatoire finie.

EXERCICE 1. Déterminez le support de la variable aléatoire dans les cas suivants.

- a) Une loterie est organisée. Cent tickets numérotés de 1 à 100 sont vendus. Les tickets 1 à 5 permettent de gagner le premier lot d'une valeur de 80 €. Les tickets 6 à 15 permettent de gagner un second lot d'une valeur de 30 €. Soient X la variable aléatoire qui à un ticket associe son numéro et Y la variable aléatoire qui à un ticket associe la valeur du lot gagné.
- b) Une puce se déplace sur une droite graduée en partant de l'origine et en faisant des bonds aléatoires de longueur 1 vers la gauche ou vers la droite. On note X_1 la variable aléatoire qui indique la position de la puce sur l'axe gradué au bout d'un bond. Plus généralement on note X_i la variable aléatoire indiquant la position de la puce au terme de $i \in \mathbb{N}^*$ bonds.

Somme de variables aléatoires.

EXERCICE 2. On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 1, 2 et 2 pour le premier et 1, 2, 3 et 3 pour le second. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancé du premier dé associe le numéro inscrit sur la face inférieure et Y celle pour le second dé. Soit $Z = X + Y$. Déterminez la loi de Z .

EXERCICE 3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $Z = X + Y$.

- 1. Calculez $\mathbb{P}(Z = 1)$.
- 2. Déterminez la loi de Z .
- 3. Calculez $\mathbb{P}_{Z=1}(X = 1)$.
- 4. Calculez $\mathbb{P}_{X=1}(Z = 2)$.

Indépendance de variables aléatoires.

Espérance.

Variance et écart-type.

EXERCICE 4. Une agence constate que le nombre d'appartements vendus chaque mois est une variable aléatoire X dont la loi peut être estimée statistiquement :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,02	0,06	0,08	0,25	0,2	0,13	0,12	0,08	0,06

Elle a constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes.

- 1. Calculez l'espérance et l'écart-type du nombre annuel d'appartements vendus.
- 2. L'agence touche 1000 € pour la vente d'un appartement et les charges fixes annuelles s'élèvent à 50 000 €. Calculez l'espérance et la variance du bénéfice annuel de l'agence.

EXERCICE 5. On admet que la demande journalière de véhicules dans une agence de location est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,22	0,37	0,24	0,10	0,05	0,02

On suppose que les 3 véhicules de l'agence sont en état de marche.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

- 1. Déterminez la loi de Y .

2. Calculez l'espérance et la variance de Y .
3. Le prix de la location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.
 - (a) Exprimez la variable aléatoire B égale au bénéfice journalier en fonction de Y .
 - (b) Calculez l'espérance et la variance de B .

Exercices.

EXERCICE 6. Déterminez l'espérance et la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

EXERCICE 7. Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.

1. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. *Commencez dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$.*
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

EXERCICE 8. À un péage autoroutier $n \in \mathbb{N}^*$ voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1 (resp. X_2 , X_3) les variables aléatoires donnant le nombre de voitures ayant franchi la barrière 1 (resp. 2, 3).

1. Déterminez la loi de X_1 .
2. Calculez les variances de X_1 , X_2 et de $X_1 + X_2$.