

Variables aléatoires et moments.

Nous nous limiterons à des univers finis ce qui permet de ne pas se préoccuper de la mesurabilité des variables aléatoires.

Notion de variable aléatoire finie.

Définition 1. Nous appellerons *variable aléatoire* sur Ω un ensemble fini toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarques.

1. La définition de variable aléatoire ne nécessite pas de situation aléatoire cependant l'ensemble de définition Ω sera bien sûr l'univers d'une expérience aléatoire.
2. $X(\Omega)$, l'ensemble des images d'éléments de Ω par X , est appelée le *support de la variable aléatoire* ou son univers-image.
3. Puisque Ω est fini $X(\Omega)$ l'est aussi.

Exemples.

1. Pour un lancer de pièce dont les issues sont P et F , en associant à pile le nombre -1 et à face 1 on définit une variable aléatoire. $X(\Omega) =$.
2. $X : \{P, F\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 12$ n'est pas une variable aléatoire car ce n'est pas une application : elle n'est pas définie en F .
3. En associant à un lancer de deux dés la somme des nombres obtenus on définit une variable aléatoire Y . $Y(\Omega) =$.
4. On lance un dé tétraédrique. Si le résultat est 1 ou 2 on gagne 1 €, si on obtient 3 on perd 3 € et si on obtient 4 on perd 4 €. Nous venons de définir une variable aléatoire Z associée à cette expérience aléatoire.
5. Il est possible de définir des variables aléatoires sur des univers non finis : à une répétition de pile ou face on associe le nombre qui est le rang du premier pile obtenu.

EXERCICE 1. Déterminez le support de la variable aléatoire dans les cas suivants.

- a) Une loterie est organisée. Cent tickets numérotés de 1 à 100 sont vendus. Les tickets 1 à 5 permettent de gagner le premier lot d'une valeur de 80 €. Les tickets 6 à 15 permettent de gagner un second lot d'une valeur de 30 €. Soient X la variable aléatoire qui à un ticket associe son numéro et Y la variable aléatoire qui à un ticket associe la valeur du lot gagné.
- b) Une puce se déplace sur une droite graduée en partant de l'origine et en faisant des bonds aléatoires de longueur 1 vers la gauche ou vers la droite. On note X_1 la variable aléatoire qui indique la position de la puce sur l'axe gradué au bout d'un bond. Plus généralement on note X_i la variable aléatoire indiquant la position de la puce au terme de $i \in \mathbb{N}^*$ bonds.

Proposition 1. Soient Ω un ensemble fini, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Les $\{X = a\}$ pour $a \in X(\Omega)$ (ou $a \in \mathbb{R}$) forment un système complet d'événements.

Démonstration. C'est une propriété des applications : les ensembles d'antécédents $X^{-1}(\{a\})$ sont disjoints deux à deux par unicité de l'image (démonstration par l'absurde).

Remarques.

1. On appelle *loi de probabilité de la variable aléatoire finie* X la distribution de probabilité $(x, \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Exemples.

1. Si $X(\Omega) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ alors on dit que X est une variable aléatoire *certaine*.

2. Si $X(\Omega) = \{0; 1\}$ et $p = \mathbb{P}(X = 1)$ alors on dit que X suit une *loi de Bernoulli de paramètre p* et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une *loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$* si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et si : $\forall a \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{n}$.
4. Soient a et b des entiers avec $a < b$. On dit que X suit une *loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$* si $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$ et : $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$.

Proposition 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble (fini), $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. $\mathbb{P}(X = a) = \sum_{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}} \mathbb{P}(\omega)$.

Démonstration. Découle de la définition de la probabilité d'un événement sur un univers fini vue en seconde : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemples.

1. Soit Y la variable aléatoire qui a un lancé de deux dés parfaitement équilibrés associe la somme des nombres obtenus. $\mathbb{P}(Y = 6) = \sum_{\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = 6\}} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}((1,5)) + ((5,1)) + ((2,4)) + ((4,2)) + ((3,3)) = \frac{5}{36}$.

Proposition 3. Soit $A \subset \mathbb{R}$. $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a)$.

Démonstration. Conséquence du fait que les $\{X = a\}$ constituent un système complet d'événements : $\{X \in A\} = \bigcup_{a \in A} \{X = a\}$.

Exemples.

1. Si Y est la sommes des nombres apparus sur les faces de deux dés équilibrés alors $\mathbb{P}(Y \leq 3) = \sum_{k=2}^3 \mathbb{P}(k) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 100 \rrbracket)$ alors $\mathbb{P}(X \in [95, +\infty[) = \mathbb{P}(X \geq 95) = \sum_{k=95}^{100} \mathbb{P}(k) = 5 \times \frac{1}{100}$.

Proposition 4. Soient Ω une ensemble fini, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire, $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application. $g \circ X$ est une variable aléatoire sur Ω que nous noterons $g(X)$.

Démonstration. Découle du fait que la composée de deux applications est une application.

Exemples.

1. Si $X(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ alors $X^2 - 1(\Omega) =$
2. αX , pour $\alpha \in \mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

Somme de variables aléatoires.

Proposition 5. Soient Ω_1 et Ω_2 des ensembles finis, $X : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire, $Y : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. L'application Z définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par : $\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, Z(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1) + Y(\omega_2)$, est une variable aléatoire sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ appelée *somme des variables aléatoires X et Y* .

Démonstration. Les applications X et Y sont toutes deux définies sur les univers Ω_1 et Ω_2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc l'application $(\omega_1, \omega_2) \mapsto X(\omega_1) + Y(\omega_2)$ est bien définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus $\Omega_1 \times \Omega_2$ est bien fini $|\Omega_1 \times \Omega_2| = |\Omega_1| \times |\Omega_2|$. Dans le cas fini la question de la mesurabilité ne se pose pas donc le résultat est évident.

Remarques.

1. Remarquons que l'application $X + Y$ est définie sur un produit cartésien donc il s'agit d'une application de deux variables ce qui n'est pas vraiment au programme. Ce qui nous intéresse se passe plutôt du côté des images donc nous n'aurons pas de difficultés avec cette notion.

Exemples.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ sont des variables aléatoires sur un même univers Ω , alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire dont le support est $\llbracket 2, 12 \rrbracket$.

EXERCICE 2. On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 1, 2 et 2 pour le premier et 1, 2, 3 et 3 pour le second. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancé du premier dé associe le numéro inscrit sur la face inférieure et Y celle pour le second dé. Soit $Z = X + Y$. Déterminez la loi de Z .

EXERCICE 3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $Z = X + Y$.

1. Calculez $\mathbb{P}(Z = 1)$.
2. Déterminez la loi de Z .
3. Calculez $\mathbb{P}_{Z=1}(X = 1)$.
4. Calculez $\mathbb{P}_{X=1}(Z = 2)$.

Indépendance de variables aléatoires.

Définition 2. Deux variables aléatoires finies $X : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont dites *indépendantes* si pour tout $x \in X(\Omega_1)$ et tout $y \in Y(\Omega_2)$, $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$.

Remarques.

1. $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = x\} \text{ et } \{Y = y\})$.
2. La généralisation de cette définition à plus de deux variables aléatoires soulève une difficulté. Trois variables aléatoires peuvent être indépendantes deux à deux (comme dans la définition ci-dessus) mais pas mutuellement indépendantes : $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\} \cap \{Z = z\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\}) \times \mathbb{P}(\{Z = z\})$.
3. L'indépendance relève souvent d'une hypothèse de modélisation. Nous aurons rarement à la démontrer.

Essayer de trouver un exemple de deux variables aléatoires indépendantes sans que les événements sur les univers de départ le soit forcément. La réciproque ?

Exemples.

1. On lance deux dés équilibrés et indépendants et on note X_i la variable aléatoire valant 1 si le résultat du i -ième lancer est paire et 0 sinon et Y la variable aléatoire valant 1 si la somme des résultats est paire et 0 sinon. Les variables aléatoires X_1 , X_2 et Y sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes. Intuitivement on comprends que si on on connaît la parité de chaque résultat on connaît la parité de leur somme.

Définition 3. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, X_2, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ des variables aléatoires indépendantes. On dit que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une *loi binomiale de paramètre n et p* et on note $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarques.

1. On retrouve les critères vus au lycée concernant les schéma de Bernoulli : répétition à l'identique et de façon indépendante.
2. Cette définition est un peu plus générale que celle avec le schéma de Bernoulli car, variable aléatoire oblige, nous ne nous préoccupons pas des univers de départ des variables aléatoires suivants la même loi de Bernoulli. Peu importe que la première variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli corresponde à un lancer de dé et la seconde à un pile-ou-face, l'important est que ce soit la même loi (avec le même paramètre).

Exemples.

1. Si $n = 1$ alors on obtient une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$.

2. À un pile-ou-face on associe 1 si l'issue est pile et 0 sinon. La répétition, un nombre fini de fois, d'un tel pile-ou-face est en général modélisé par une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Espérance.

Définition 4. Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω . Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors on appelle espérance de X le nombre réel $\mathbb{E}(X) := \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i)x_i$.

Exemples.

1. Si

x_i	-2	0	1	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

 alors $E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{1}{10} = -0,2$.

Remarques.

1. Lorsque l'espérance est finie l'espérance est la valeur moyenne que l'on obtient pour la variable aléatoire en recommençant un grand nombre de fois l'expérience.
2. Si X est finie alors $E(X) \in \mathbb{R}$.
3. Cette présentation de la formule de l'espérance laisse entrevoir une généralisation : $E(X) = \int_I f(x) dx$.

Proposition 6. Espérance pour quelques lois.

- (i) Si X suit une loi certaine dont le support est $c \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{E}(X) = c$.
- (ii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$.
- (iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
- (iv) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

- (i) La loi de probabilité de X est définie par la distribution

a	c
$\mathbb{P}(X = a)$	1

 donc $\mathbb{E}(X) = 1 \times c = c$.
- (ii) La loi de probabilité de X est définie par la distribution

a	0	1
$\mathbb{P}(X = a)$	$1 - p$	p

 donc $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$.
- (iii) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.
- (iv) Somme des premiers termes d'une suite arithmétique.

Théorème 1. *Formule du transfert.* Soient Ω un ensemble, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire finie. Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i)f(x_i)$.

Remarques.

1. Nous pouvons ainsi calculer les espérances de variables aléatoires construites à partir de variables aléatoires qui nous sont connues.

Exemples.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y = 2X$ alors $\mathbb{E}(Y) = 2 \times (1 - p) \times 0 + 2 \times p \times 1 = 2p$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y = X^2$ alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

Proposition 7. Propriétés de l'espérance. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, X et Y des variables aléatoires réelles.

- (i) $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
- (ii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
- (iii) Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

(iv) Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

- (i) Corollaire du théorème de transfert.
(ii) Notons : $X(\Omega_1) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega_2) = \{y_1, \dots, y_m\}$. Ce n'est pas tout à fait la définition de l'espérance mais nous nous y retrouvons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_i \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) + \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) x_i + \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(Y = y_j) y_j \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

- (iii) Si X est une variable aléatoire à valeurs positives alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$ en tant que somme de produits de nombres positifs.
(iv) $X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \geq 0$, donc $\mathbb{E}(Y - X) \geq 0$ et, d'après un point précédent $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geq 0$.

Exemples.

- Dans un lancer de dé à 6 faces le gain Y égale à 8 euros pour un nombre inférieur ou égale à 2 et de -5 euros sinon. $Y = 13X - 5$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.
Donc $\mathbb{E}(Y) = 13\mathbb{E}(X) - 5 = 13 \times \frac{1}{3} - 5 = -\frac{2}{3}$.
- Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_2)$ alors $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = p_1 + p_2$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors $\mathbb{E}(X + Y) = p + \frac{n+1}{2}$.
- Si $X_1, X_2, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n p = np$.

Variance et écart-type.

Définition 5. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *variance* de X le réel $\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.

On appelle alors *écart-type* le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exemples.

- Si

x_i	-2	0	1	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

 alors $V(X) = (-2 - (-0,2))^2 \times \frac{1}{2} + (0 - (-0,2))^2 \times \frac{1}{10} + (1 - (-0,2))^2 \times \frac{3}{10} + (5 - (-0,2))^2 \times \frac{1}{10} = 4,76$.

Proposition 8. Formule de Koenig-Huygens. Soit X une variable aléatoire réelle. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Remarques.

1. Permet de calculer plus simplement la variance.

Proposition 9. Soient $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

- (i) $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
- (ii) Si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire certaine.
- (iii) Si X et Y sont indépendantes $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration.

Proposition 10. Variance pour quelques lois.

- (i) Si X est certaine alors $V(X) = 0$.
- (ii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $V(X) = p(1 - p)$.
- (iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ alors $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.
- (iv) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors $V(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$.

EXERCICE 4. Une agence constate que le nombre d'appartements vendus chaque mois est une variable aléatoire X dont la loi peut être estimée statistiquement :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,02	0,06	0,08	0,25	0,2	0,13	0,12	0,08	0,06

Elle a constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes.

1. Calculez l'espérance et l'écart-type du nombre annuel d'appartements vendus.
2. L'agence touche 1000 € pour la vente d'un appartement et les charges fixes annuelles s'élèvent à 50 000 €.

Calculez l'espérance et la variance du bénéfice annuel de l'agence.

EXERCICE 5. On admet que la demande journalière de véhicules est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,22	0,37	0,24	0,10	0,05	0,02

On suppose que les 3 véhicules de l'agence sont en état de marche.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminez la loi de Y .
2. Calculez l'espérance et la variance de Y .
3. Le prix de la location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.
 - (a) Exprimez la variable aléatoire B égale au bénéfice journalier en fonction de Y .
 - (b) Calculez l'espérance et la variance de B .

Exercice 5.

1. $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

a	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = a)$	0,22	0,37	0,24	0,17

2. $\mathbb{E}(X) = 1,36$.
 $\mathbb{V}(X) = (0 - 1,36)^2 \times 0,22 + (1 - 1,36)^2 \times 0,37 + (2 - 1,36)^2 \times 0,24 + (3 - 1,36)^2 \times 0,17 = 1,0104$
3. (a) $B = 50X - 3 \times 10 - 10X = 40X - 30$.
(b) $\mathbb{E}(B) = 40\mathbb{E}(X) - 30$. $\mathbb{V}(B) = 40^2\mathbb{V}(X)$.

Exercices.

EXERCICE 6. Déterminez l'espérance et la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 6. $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = n + 1$. $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{n^2 - 1}{6}$.

EXERCICE 7. Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.

1. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.