Loi binomiale.

Épreuve de Bernoulli.

EXERCICE 1. Dites si les expériences aléatoires suivantes sont des épreuves de Bernoulli.

1. Un stock contient 1 % de pièces défectueuses. On y prélève une pièce et on regarde sil elle présente un défaut.
2. Selon l'INSEE, 45 % des familles françaises ont un seul enfant, 38 % en ont deux et 17 % en ont trois ou plus. On interroge au hasard un élève et on lui demande le nombre d'enfants dans sa famille.

Loi de Bernoulli.

Moments d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.

EXERCICE 2. Une entreprise fabrique des assiettes. On sait que 6 % des assiettes produites présentent un défaut. On choisit une assiette au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'assiette ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Quelle loi suit X ?
2. Donnez le paramètre de cette loi.
3. Calculez $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

Schéma de Bernoulli.

EXERCICE 3. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, dites si elle constitue un schéma de Bernoulli. Si oui donnez n et p.

1. Dans un stock de 20 vis, dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis, au hasard et sans remise. Pour chacune on regarde si elle est trop longue ou non.
2. On considère une suite de 50 lettres choisies de façon aléatoire. Pour chacune d'entre elles, on regarde si elle est une voyelle ou non.

EXERCICE 4. Une chaîne de magasins de bricolage commercialise des ponceuses « elliptiques ». Statistiquement 8 % des ponceuses du stock sont défectueuses. On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Démontrez que cette situation est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

Arbre pondéré et schéma de Bernoulli.

EXERCICE 5. Un appareil comporte deux composants électroniques qui fonctionnent de façon indépendante. On suppose que, pour chacun d'entre eux, la probabilité de l'événement P : « le composant tombe en panne » est égale à 0,01.

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) Aucun des deux composants ne tombe en panne.
   (b) Un sel des deux composants tombe en panne.
   (c) Les deux composants tombent en panne.

EXERCICE 6. Sur son trajet domicile-travail un individu rencontre trois feux tricolores, indépendants les uns des autres. Il a remarqué que, statistiquement, chaque feu est au vert au moins une fois sur trois.

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Pour un trajet domicile-travail calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Deux feux sur les trois sont au vert.
   (b) Un seul feu sur les trois est au vert.
   (c) Tous les feux sont au vert.
   (d) Aucun des trois feux n'est au vert.

Les issues d'un schéma de Bernoulli.

Variable aléatoire suivant une loi binomiale.

EXERCICE 7. Dans un stock de ballons de foot contenant 70 % de ballons bicolores, on prélève 12 ballons au hasard, successivement et avec remise. X donne le nombre de ballons bicolores obtenus. Justifiez que X suit une loi binomiale.

EXERCICE 8. Dites si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui précisez-en les paramètres.

1. Dans un supermarché, 20 % des clients du samedi ont un caddie inférieur à 100 €. On choisit au hasard 15 clients un samedi. X donne le nombre de clients dont le caddie est inférieur à 100 €.
2. On lance cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. X donne le rang du 1$^{\text{er}}$ pile obtenu (X prend la valeur 6 si on a pas obtenu de pile sur les 5 lancers).

Coefficients binomiaux.

Calcul de probabilité pour une loi binomiale.

EXERCICE 9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}1$. Donnez, sous forme d'une fraction irréductible l'expression de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

EXERCICE 10. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Donnez, sous forme d'une fraction irréductible l'expression de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Déduisez-en $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

EXERCICE 11. Un pion est posé sur un axe gradué (axe des abscisses) à l'origine O. Une pièce équilibrée est lancée. Si elle tombe sur pile, le pion avance d'une unité, sinon il recule d'une unité. Une parti consiste à lancer la pièce trois fois de suite.

1. Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2. Déterminez la probabilité des événements suivants.
   (a) A : « le pion fini à l'abscisse 1 ».
   (b) B : « le pion revient sur l'origine ».
   (c) C : « le pion fini à l'abscisse -1 ».
   (d) D : « le pion fini à l'abscisse 3 ».

Calcul de probabilité ou avec la fonction de répartition avec la calculatrice.

EXERCICE 12. D'après l'INSEE, la proportion de Français de moins de 20 ans est restée stable à 24,6 % entre 2012 et 2014. On suppose que cette proportion se maintient pendant quelques années.

On interroge au hasard 12 Français et on note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui sont âgés de moins de 20 ans.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) 10 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (b) Au plus 8 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (c) Au moins 4 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant moins de 20 ans ?

EXERCICE 13. 18 % des Français âgés de plus de 15 ans ont fréquentés au moins une fois une bibliothèque en 2008. On suppose que cette proportion se maintient pendant les années qui suivent et on interroge au hasard 30 Français âgés de plus de 15 ans. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui ont fréquenté une bibliothèque dans l'année.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :

   a) $\mathbb{P}(X = 10)$, b) $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$, c) $\mathbb{P}(X > 8)$.

   Traduisez chaque résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant fréquenté une bibliothèque dans l'année ?

EXERCICE 14. Un fumeur est dit « fumeur régulier » s'il fume au moins une cigarette par jour. En 2010, en France, la proportion de fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans, était de 23,6 %. On choisit au hasard, et de manière indépendante, quinze jeunes âgés de 15 à 19 ans. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fumeurs réguliers parmi ces quinze jeunes.

1. Précisez la loi de probabilité de X.
2. Déterminez les probabilités des événements suivants, en arrondissant à 0,001 près.
   (a) Deux des jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (b) Aucun des jeunes interrogés n'est un fumeur régulier.
   (c) Moins de cinq jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (d) Plus d'un jeune interrogé est un fumeur régulier.

EXERCICE 15. Un fabricant vend des stylos par lot de 10. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos défectueux dans un lot. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,034. On donnera les résultats à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins un stylo défectueux ?
2. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins deux stylos défectueux ?

EXERCICE 16. On considère que dans une classe de 24 élèves, chaque élève à 82 % de chance d'obtenir son bac.

1. On prend un élève au hasard. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si cet élève obtient son bac et 1 sinon.
   (a) Quelle loi suit X ?
   (b) Donnez son paramètre.

2. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves ayant obtenu son bac dans cette classe de 24 élèves.
   (a) Quelle loi suit Y ?
   (b) Donnez ses paramètres.
   (c) Quelle est la probabilité que tous les élèves soient reçus ? On donnera un résultat approché à 10^{-3} près.

EXERCICE 17. On lance simultanément deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

1. Quelle est la probabilité de faire un double 6 ?
2. On lance 10 fois de suite cette paire de dés. Quelle est la probabilité de faire au moins trois double 6 lors de ces 10 parties ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

EXERCICE 18. Un footballeur tire des penalties. Une étude statistique sur son taux de réussite montre qu'il marque le but avec une probabilité de 0,75. Ce footballeur tire une série de 10 penalties. On suppose que les différents tirs sont indépendants.

1. Son entraîneur lui affirme qu'il a à peu près autant de chance de réussir 5 penalties que de les réussir tous. A-t-il raison ?
2. L'entraîneur renchérit en disant à son joueur qu'il a plus d'une chance sur deux de réussir au moins 8 penalties. Qu'en est-il ?

Moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

EXERCICE 19. Une association organise une tombola et vend un très grand nombre de tickets à gratter ? On suppose que deux tickets sur dix sont gagnants.

Une personne achète au hasard vingt tickets.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants.

1. Donnez la loi de probabilité de X.
2. Sans justification donnez a valeur de k telle que $\mathbb{P}(x = k)$ soit maximale. Interprétez ce résultat.
3. Calculez l'espérance de X. Interprétez.

EXERCICE 20. Un basketteur s'entraîne à tirer des lancers francs. On suppose que, quel que soit le résultat des tirs précédents, la probabilité qu'il réussisse est égale à 0,8. Il effectue une série de 30 tirs. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où il réussit son tir.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.
2. Calculez la probabilité que le basketteur
   (a) réussisse 18 tir exactement,
   (b) réussisse moins de 15 tirs,
   (c) réussisse au moins 20 tirs.
3. Déterminez le nombre moyen de tirs réussis.

EXERCICE 21. Une diode est fabriquée en série. À la sortie de la ligne de production, la probabilité qu'une diode prise au hasard soit défectueuse est égale à 0,017. Les diodes sont conditionnées par boîtes de 185 unités.

1. Quel nombre moyen de diodes défectueuses peut-on attendre par boîte ?
2. Une boîte est prise au hasard après conditionnement. déterminez la probabilité qu'elle ne contienne aucune diode défectueuse.
3. Une boîte est dite « qualifiée » lorsqu'elle contient au plus quatre diodes défectueuses. Déterminez la probabilité que la boîte choisie soit qualifiée.

4. Un carton contient 10 boîtes. Quelle est la probabilité qu'un carton pris au hasard ne contienne que des boîtes qualifiées ?

EXERCICE 22.
EXERCICE 23.

Exercices.

EXERCICE 24. Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun on note C l'événement « le client prend un café ».

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Un seul des quatre clients prend un café.
   (b) Au moins deux clients prennent un café.
   (c) Au plus deux clients prennent un café.

EXERCICE 25. Un carton de jouet contient un nombre très important de petites briques de couleur rouge ou bleue. On estime que la proportion de briques bleues est 40 %.

1. Justifiez que l'expérience est un schéma de Bernoulli.
2. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Élise a prélevé 4 briques bleues.
   (b) Élise à prélevé 2 briques bleues, puis 2 rouges.
   (c) Élise a prélevé au moins une brique bleue ?
   (d) Élise a prélevé au plus une brique rouge.

EXERCICE 26. David a du mal a entendre son réveil le matin. Ses parents estiment que, 6 fois sur 10, il se rendort et arrive en retard au lycée.

On suppose que les réveils de David sont indépendants d'un matin à l'autre et on étudie son comportement sur une semaine de 5 jours (du lundi au vendredi).

1. En notant pour chaque matin R l'événement « David se rendort et est en retard au lycée », représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) David n'est pas en retard de la semaine.
   (b) David est en retard au lycée le lundi et le mardi matins.
   (c) David est en retard deux matins consécutifs.
   (d) David est en retard au plus trois fois.

Échantillonnage.

EXERCICE 27. Au cours d'une soirée, un restaurant accueille 45 convives.

Pour un convive quelconque il est établi par le restaurateur que la probabilité qu'il prenne un café à la fin du repas est exactement de 0,8.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cafés effectivement commandés à l'issue de la soirée. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(45; 0{,}8)$.

1. (a) Afficher informatiquement les valeurs de k et les probabilités correspondantes $\mathscr{P}(X = k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.

(b) Donnez les valeurs de k pour lesquelles $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0{,}1$.

2. Toujours à l'aide de la machine, affichez les probabilités cumulées croissantes $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.
3. (a) Déterminez le plus petit nombre entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant 0{,}9$.
   Interprétez ce résultat dans le contexte.
   (b) Déterminez le plus grand nombre entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \leqslant 0{,}1$.
   (c) Déterminez un ensemble $[\![c,d]\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) \geqslant 0{,}95$.

EXERCICE 28. Un site internet pose à tout usager une question de satisfaction à l'issue de sa visite ?

La probabilité qu'un usager réponde « non » à cette question est 0,17.
Un échantillon de 100 réponses prises au hasard a été constitué.
On note X le nombre de réponses « non » contenues dans cet échantillon.

1. (a) Quelle est la loi suivie par lé variable X ?
   (b) Avec la calculatrice, déterminez les valeurs de k pour lesquelles on a $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0{,}05$.
2. (a) À partir de quelle valeur de k a-t-on $\mathbb{P}(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$?
   Donnez une interprétation de ce résultat.
   (b) Déterminez un ensemble $[\![k,k']\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k') \geqslant 0{,}5$.

EXERCICE 29. Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord. Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose. Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

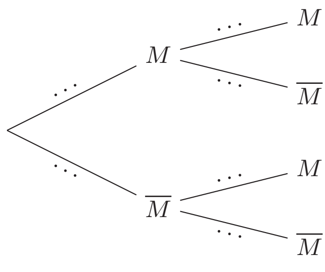
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose. On considère les évènements suivants :

— M : « le coyote est malade » ;
— T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. (a) Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   (b) Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   (c) Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

Avec des variables aléatoires auxiliaires.

EXERCICE 30. On joue à pile ou face cinq fois de suite. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu face.

1. Quelle loi suit X ? Donnez ses paramètres.

Pour jouer à ce jeu, il faut payer 3 €. On gagne 1 € à chaque fois qu'on obtient face lors d'un des cinq lancers.

On note Y la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) totale lors de ce jeu.

2. Exprimez Y en fonction de X.
3. Déduisez-en $\mathbb{E}(Y)$.
4. Ce jeu est-il financièrement intéressant ?
5. Quelle somme aurait-il fallu payer au départ pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 31. Un tireur à l'arc atteint sa cible neuf fois sur dix. Ce tireur participe à un concours primé.

Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 € , sinon il perd 20 €. On suppose que les tirs sont indépendants.

1. On appelle X le nombre de flèches ayant atteint la cible à l'issue des cinq tirs.
   (a) Montrer que X suit une loi binomiale dont précisera les paramètres.
   (b) Déterminez la probabilité d'atteindre au moins 2 fois la cible.
2. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des cinq tirs.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
   (b) Déterminez la loi de Y.
   (c) Quel est le gain moyen (positif ou négatif) du tireur s'il participe un grand nombre de fois à ce concours ? Est-ce intéressant pour lui ?

EXERCICE 32. Pour un avion à plusieurs réacteurs, on suppose que le risque de panne d'un des réacteurs est indépendant de l'état des autres réacteurs.

Soit p la probabilité de panne d'un réacteur.

On suppose que l'avion peut continuer à voler si au moins la moitié de ses réacteurs ne sont pas en panne.

1. On appelle X le nombre de réacteurs en panne sur un biréacteur. (Un biréacteur est un avion avec deux réacteurs.)
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (c) Déterminez $P(X \leqslant 1)$ en fonction de p.
2. On appelle Y le nombre de réacteurs en panne sur un quadriréacteur.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de Y ?
   (c) Déterminez $P(Y \leqslant 2)$ en fonction de p.
3. Comparez la sécurité offerte par un biréacteur à celle offerte par un quadriréacteur suivant les valeurs de p.

EXERCICE 33. Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1 500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment.

Pour ce cavalier, la probabilité de franchir l'obstacle sans faute est de $\frac{2}{3}$. Le passage d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Quelle est la loi de probabilité de X.
2. Calculez l'espérance de X.
3. On appelle Y la variable aléatoire égale à la durée du parcours. Exprimez Y en fonction de X et donnez son espérance. Interprétez le résultat.

EXERCICE 34. **Partie A.**

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.

S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.

Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.

S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0{,}6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie B.

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
   On appelle :

   - Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;
   - C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.
   (b) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.
   (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau. Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.
   (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

EXERCICE 35.

La partie C *est indépendante des parties* A *et* B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

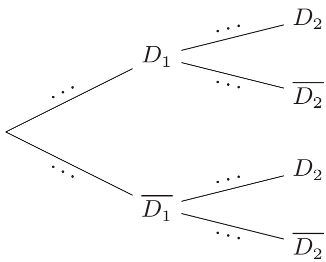
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n.

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$.

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n).

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$. On pourra s'aider d'un arbre.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.
   (b) La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\dfrac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Exercices avec variation de la taille de l'échantillon.

EXERCICE 36.

— Bac 2021 Amérique du Nord mai 2021.