Loi binomiale.

Dans cette leçon $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ désigne un espace probabiliste fini.

Les variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs réelles seront notées X, Y, ou Z.

I Loi de Bernoulli.

1 Épreuve de Bernoulli.

Définition 1

Nous appellerons *épreuve de Bernoulli* toute expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues.

Remarques.

1. L'une des issues est appelée *échec* et l'autre *succès*.
2. L'univers d'une épreuve de Bernoulli est $\{S;\overline{S}\}$
3. La probabilité du succès est notée p est appelé *le paramètre* de l'épreuve de Bernoulli.
4. La probabilité de l'échec est souvent notée q. On a donc : $q = 1 - p$.
5. L'expression épreuve désigne une partie d'une expérience aléatoire complexe mais qui peut être vue comme une expérience à part entière.
6.

Exemples.

1. Typiquement il s'agit d'un pile ou face avec une pièce éventuellement truquée.
2. Lire le nombre obtenu en lançant un dé tétraédrique dont les faces sont numérotés de $i1$ ià 4 n'est pas une épreuve de Bernoulli.
3. Lancer deux fois d'affilée une pièce n'est pas une épreuve de Bernoulli.

Exercice 1.

Dites si les expériences aléatoires suivantes sont des épreuves de Bernoulli.

1. Un stock contient 1 % de pièces défectueuses. On y prélève une pièce et on regarde sil elle présente un défaut.
2. Selon l'INSEE, 45 % des familles françaises ont un seul enfant, 38 % en ont deux et 17 % en ont trois ou plus. On intérroge au hasard un élève et on lui demande le nombre d'enfants dans sa famille.

Correction de l'exercice 1

1. - Épreuve : prélever une pièce.
   - Succès S :« la pièce est défectueuse ».
   - Probabilité du succès : $p = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

   Il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli.
2. - Épreuve : interroger une personne au hasard.
   - Il y a plus de deux issues et donc pas de succès.

   Il ne s'agit pas d'une épreuve de Bernoulli.

2 Loi de Bernoulli.

Les résultats obtenus sont des lettres ce qui n'est pas le plus pratique pour modéliser mathématiquement. C'est pourquoi nous allons associer une variable aléatoire aux épreuves de Bernoulli.

Définition 2

Nous dirons qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une *loi de Bernoulli de paramètre p*, si X compte le nombre de succès lors d'une épreuve de Bernoulli de paramètres p.

Remarques.

1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p nous avons donc :

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1 - p$	p

3 Moments d'une loi de Bernoulli.

Proposition 1

Soient :

. $p \in [0;1]$,

. X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

(i) $\mathbb{E}(X) = p$.

(ii) $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

(iii) $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Démonstration

(i) Si $n \in \mathbb{N}^*$ désigne le nombre de valeurs prisent par la variable aléatoire :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i$$

Donc ici :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = x_1)x_1 + \mathbb{P}(X = x_2)x_2 \\ &= (1-p) \times 0 + p \times 1 \\ &= p\end{aligned}$$

(ii) Cette démonstration n'utilise pas la définition de la variance vue en première mais une caractérisation.
Puisque

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

regardons la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$.

y_i	p^2	$(1-p)^2$
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$1-p$	p

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= (1-p) \times p^2 + p \times (1-p)^2 \\ &= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

(iii) Trivial.

■

Remarques.

1. On dit que la variance est un moment centré puisqu'on regarde l'écart par rapport à la moyenne : $X - \mathbb{E}(X)$.

Exercice 2. ⚽
Une entreprise fabrique des assiettes. On sait que 6 % des assiettes produites présentent un défaut. On choisit une assiette au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'assiette ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Quelle loi suit X ?
2. Donnez le paramètre de cette loi.
3. Calculez $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et σ.

II Loi binomiale.

1 Schéma de Bernoulli.

Définition 3

Nous appellerons *schéma de Bernoulli de paramètres n et p* toute expérience aléatoire constituée de la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p indépendantes.

Remarques.

1. Ainsi un schéma de Bernoulli est une famille d'expériences aléatoires présentant des caractéristiques communes qui permettront de les modéliser mathématiquement de la même façon.

Exemples.

1. L'exemple typique est celui de la répétition de plusieurs piles ou face.

Exercice 3.
Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, dites si elle constitue un schéma de Bernoulli. Si oui donnez n et p.

1. Dans un stock de 20 vis, dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis, au hasard et sans remise. Pour chacune on regarde si elle est trop longue ou non.
2. On considère une suite de 50 lettres choisies de façon aléatoire. Pour chacune d'entre elles, on regarde si elle est une voyelle ou non.

1. Il ne s'agit pas d'un schéma de Bernoulli car le tirage étant sans remise les différents tirages ne sont pas indépendants les uns des autres.
2. Démontrons qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

   * Épreuve de Bernoulli

— Épreuve : choisir une lettre au hasard.
— Succès : « La lettre est une voyelle. »
— $p = \frac{6}{26}$.

* Schéma de Bernoulli.

Le choix de la lettre étant répété $n = 50$ fois à l'identique et de façon indépendante nous pouvons affirmer que

ces choix constituent un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{6}{26}$.

Exercice 4.

Une chaîne de magasins de bricolage commercialise des ponceuses « elliptiques ».
Statistiquement 8 % des ponceuses du stock sont défectueuses.
On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
Démontrez que cette situation est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

2 Arbre pondéré et schéma de Bernoulli.

L'arbre pondéré représentant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p comporte :

— 2 branches à chaque embranchement conduisant aux nœuds S et $\overline{S}$ avec les probabilités p et $1 - p$,
— n niveaux

Exercice 5.

Un appareil comporte deux composants électroniques qui fonctionnent de façon indépendante. On suppose que, pour chacun d'entre eux, la probabilité de l'événement P : « le composant tombe en panne » est égale à 0,01.

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) Aucun des deux composants ne tombe en panne.
   (b) Un sel des deux composants tombe en panne.
   (c) Les deux composants tombent en panne.

Exercice 6.

Sur son trajet domicile-travail un individu rencontre trois feux tricolores, indépendants les uns des autres. Il a remarqué que, statistiquement, chaque feu est au vert au moins une fois sur trois.

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Pour un trajet domicile-travail calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Deux feux sur les trois sont au vert.
   (b) Un seul feu sur les trois est au vert.
   (c) Tous les feux sont au vert.
   (d) Aucun des trois feu n'est au vert.

Exercice 7.

Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun on note C l'événement « le client prend un café ».

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Un seul des quatre clients prend un café.
   (b) Au moins deux clients prennent un café.
   (c) Au plus deux clients prennent un café.

Exercice 8.

Un carton de jouet contient un nombre très important de petites briques de couleur rouge ou bleue. On estime que la proportion de briques bleues est 40 %.

1. Justifiez que l'expérience est un schéma de Bernoulli.
2. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Élise a prélevé 4 briques bleues.
   (b) Élise à prélevé 2 briques bleues, puis 2 rouges.
   (c) Élise a prélevé au moins une brique bleue ?
   (d) Élise a prélevé au plus une brique rouge.

Exercice 9. ⚽

David a du mal a entendre son réveil le matin. Ses parents estiment que, 6 fois sur 10, il se rendort et arrive en retard au lycée.
On suppose que les réveils de David sont indépendants d'un matin à l'autre et on étudie son comportement sur une semaine de 5 jours (du lundi au vendredi).

1. En notant pour chaque matin R l'événement « David se rendort et est en retard au lycée », représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) David n'est pas en retard de la semaine.
   (b) David est en retard au lycée le lundi et le mardi matins.
   (c) David est en retard deux matins consécutifs.
   (d) David est en retard au plus trois fois.

3 Les issues d'un schéma de Bernoulli.

Définition 4

Soient x et y deux éléments.

On appelle *couple* "x, y" et on note (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Proposition 2

Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des éléments.

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Définition 5

Soient :

. E et F des ensembles.

Nous appellerons *produit cartésien de* E et F l'ensemble que nous noterons $E \times F$ formé de tous les couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarques.

1. Si $E = F$ plutôt que d'écrire $E \times E$ nous écrirons E^2.
   De même $E \times E \times E = E^3$.

2. En itérant le procédé nous définirions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-uplets (ou n-listes) : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$.
   L'ensemble des n-uplets est encore appelé produit cartésien et est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Exemples.

1. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Il peut être vu comme l'ensemble des coordonnées des points dans un espace affine muni d'un repère cartésien.
2. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des coordonnées de l'espace affine euclidien muni d'un repère.
3. L'univers d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est $\Omega = \{S, \overline{S}\}^n$ et les issues sont des n-uplets formés de S et de $\overline{S}$.

4 Variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Définition 6

Nous dirons qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, et nous noterons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, si X compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Remarques.

1. Par définition $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ (en utilisant d'autres notations : $X \in \{0; 1; \ldots; n\}$).
2. En particulier si X suit une loi binomiale de paramètre $p \in [0; 1]$ alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}(1,p)$.

Exemples.

1. L'exemple typique est celui de la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles obtenus lors de la répétition de plusieurs piles ou face. Ainsi si on lance 10 fois la pièce et que celle-ci est parfaitement équilibrée alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 10.

Dans un stock de ballons de foot contenant 70 % de ballons bicolores, on prélève 12 ballons au hasard, successivement et avec remise.
X donne le nombre de ballons bicolores obtenus.
Justifiez que X suit une loi binomiale.

Démontrons que X suit une loi binomiale.

* Épreuve de Bernoulli
  — Épreuve : prélever un ballon
  — Succès : « Le ballon est bicolore. »
  — $p = \frac{70}{100}$.
* Schéma de Bernoulli.
  Le choix du ballon étant répété $n = 12$ fois à l'identique et de façon indépendante (avec remise) nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
* Variable aléatoire.
  La variable aléatoire X compte le nombre de ballons bicolores obtenus donc le nombre de succès de notre schéma de Bernoulli.
* Conclusion.
  X suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{70}{100}$

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(12; \frac{70}{100}\right)$$

Exercice 11. ⚽

Dites si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui précisez-en les paramètres.

1. Dans un supermarché, 20 % des clients du samedi ont un caddie inférieur à 100 €. On choisit au hasard 15 clients un samedi. X donne le nombre de clients dont le caddie est inférieur à 100 €.
2. On lance cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. X donne le rang du 1$^{\text{er}}$ pile obtenu (X prend la valeur 6 si on a pas obtenu de pile sur les 5 lancers).

5 Coefficients binomiaux.

Définition 7

Soient :

. $p \in [0; 1]$,

. $n \in \mathbb{N}$,

. $k \in [\![0,n]\!]$.

Étant donné un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, nous appellerons *coefficient binomial « k parmi n »* le nombre entier noté $\binom{n}{k}$ égale au nombre d'issues de l'expérience aléatoire comportant exactement k succès.

Exemples.

1. En considérant une répétition de 3 piles ou face : $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{2} = 1$.

Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}$, nous appelons *factoriel n* le nombre entier, noté $n!$,égale à 1 si $n = 0$ et $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ sinon.

Proposition 3 - Formule du coefficient binomiale.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$.

. $k \in [\![0,n]\!]$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration

Le schéma de Bernoulli est formé de n-uplets.

Le nombre de n-uplets formés de S et de $\overline{S}$, qui ne nous servira pas dans cette démonstration : 2^n.

Sur un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 5$, le nombre de chemins avec 3 succès est $\frac{5!}{3!}$.

En effet, construire un 5-uplets avec 3 succès c'est choisir les 3 positions parmi 5 possibles où nous écrirons S. Le choix de ces trois positions est un tirage aléatoire sans remise de trois nombres dans
$lbracket 1; 5]\!]$. En faisant un arbre nous voyons que nous avons $5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{2!}$.

Mais certains choix de positions correspondent aux mêmes uplets. Ainsi (1,2,3) donne le même chemin que (1,3,2). Là encore un arbre nous permet de compter le nombre de chemins identiques donnant les mêmes 3-uplets avec les nombre 1, 2 et 3 : $3 \times 2 \times 1 = 3!$.

Finalement le nombre de chemins avec 3 succès est : $\frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5}{2!(5-2)!}$.

■

Proposition 4 - Formule de Pascal.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$.

. $k \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!}\\
&= \frac{n!\times(k+1)}{k!(n-k)!\times(k+1)}+\frac{n!\times(n-k)}{(k+1)![n-(k+1)]!\times(n-k)}\\
&= \frac{n!\times(k+1)+n!\times(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!\times[(k+1)+(n-k)]}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

■

Remarques.

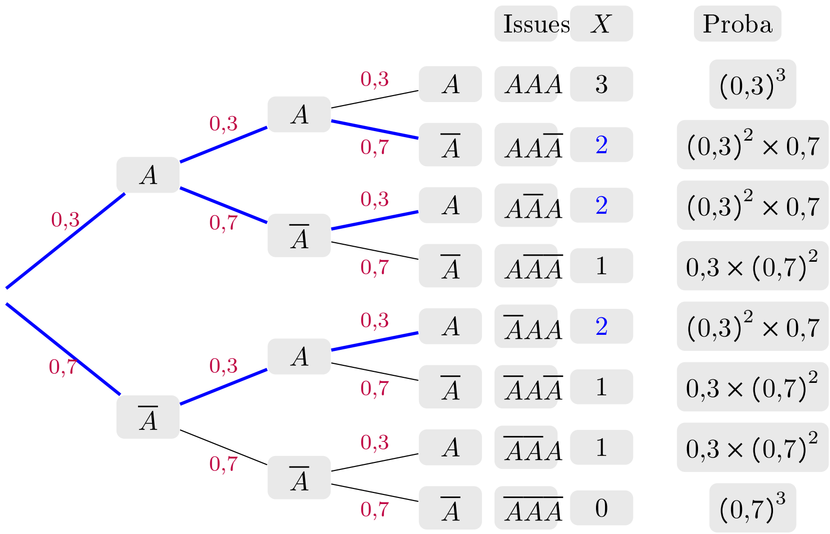
1. Triangle de Pascal.
2. Remarquons que les coefficients sont ceux intervenant dans les identités remarquables (degré 2 et 3).

Exercice 12.

6 Calcul de probabilité pour une loi binomiale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}3$.

La situation peut donc être représentée par l'arbre



Nous souhaitons calculer la probabilité d'obtenir 2 succès. Autrement dit nous cherchons $P(X=2)$.

- La probabilité d'un chemin comportant 2 succès est $0{,}3\times 0{,}3\times 0{,}7 = 0{,}3^2\times 0{,}7$
- Il y a $\binom{3}{2}=3$ chemins sur l'arbre comportant (exactement) 2 succès.

Nous en déduisons $P(X=2)=3\times 0{,}3^2\times 0{,}7=0{,}189$.

Proposition 5

Soient :

. $n\in\mathbb{N}$,

. $k\in[\![0,n]\!]$,

. $p\in[0;1]$,

. $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

Démonstration

■

Exercice 13.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}1$. Donnez, sous forme d'une fraction irréductible l'expression de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

Exercice 14.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Donnez, sous forme d'une fraction irréductible l'expression de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Déduisez-en $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

Correction de l'exercice 14

1. $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4096}, \frac{9}{2048}\ \frac{135}{4096}$.
2. $\frac{1971}{2048} \approx 0{,}9624$

Exercice 15.

7 Calcul de probabilité ou de fonction de répartition avec la calculatrice.

Supposons par exemple que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(12; 0{,}2)$.

Pour calculer $P(X = 3)$ on peut utiliser la fonction $binomFdp(n,p,k)$. Autrement dit :
$\boxed{\text{2nde}}$, $\boxed{\text{var}}$ (distrib), onglet (DISTRIB), choix A : $binomFdp$.

Pour calculer $P(X \leq 3)$ on peut utiliser la fonction $binomFRp(n,p,k)$. Autrement dit :
$\boxed{\text{2nde}}$, $\boxed{\text{var}}$ (distrib), onglet (DISTRIB), choix B : $binomFRp$.

Exercice 16.

D'après l'INSEE, la proportion de Français de moins de 20 ans esi restée stable à 24,6 % entre 2012 et 2014. On suppose que cette proportion se maintient pendant quelques années.
On interroge au hasard 12 Français et on note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui sont âgés de moins de 20 ans.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) 10 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (b) Au plus 8 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (c) Au moins 4 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant moins de 20 ans ?

Exercice 17. ⚽

18 % des Français âgés de plus de 15 ans ont fréquentés au moins une fois une bibliothèque en 2008.
On suppose que cette proportion se maintient pendant les années qui suivent et on interroge au hasard 30 Français âgés de plus de 15 ans. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui ont fréquenté une bibliothèque dans l'année.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :

   a) $\mathbb{P}(X = 10)$, b) $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$, c) $\mathbb{P}(X > 8)$.

   Traduisez chaque résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant fréquenté une bibliothèque dans l'année ?

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30; 0{,}18)$.
2. (a) $P(X = 10) \approx 0{,}0203$. La probabilité que 10 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de 0,0203.
   (b) $P(X \leq 5) \approx 0{,}5395$. La probabilité qu'au plus 5 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de 0,5395.
   (c) $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}1582$. La probabilité qu'au moins 7 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de 0,1582.
3. Le résultat s'obtient avec le tableau de valeur de la calculatrice. Le nombre le plus probable est de 5 personnes parmi les 30.

Exercice 18. ⚽

Un fumeur est dit « fumeur régulier » s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion de fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans, était de 23,6 %.
On choisit au hasard, et de manière indépendante, quinze jeunes âgés de 15 à 19 ans.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fumeurs réguliers parmi ces quinze jeunes.

1. Précisez la loi de probabilité de X.
2. Déterminez les probabilités des événements suivants, en arrondissant à 0,001 près.
   (a) Deux des jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (b) Aucun des jeunes interrogés n'est un fumeur régulier.
   (c) Moins de cinq jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (d) Plus d'un jeune interrogé est un fumeur régulier.

Exercice 19.

Un fabricant vend des stylos par lot de 10. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos défectueux dans un lot. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,034.
On donnera les résultats à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins un stylo défectueux ?
2. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins deux stylos défectueux ?

Exercice 20.

Exercice 21.

On lance simultanément deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

1. Quelle est la probabilité de faire un double 6 ?
2. On lance 10 fois de suite cette paire de dés.
   Quelle est la probabilité de faire au moins trois double 6 lors de ces 10 parties ?
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

Exercice 22.

8 Moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Proposition 6

Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

(i) $\mathbb{E}(Y) = np$.

(ii) $\mathbb{V}(Y) = np(1-p)$.

(iii) $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration

La démonstration repose sur des propriétés de l'espérance et de la variance que nous n'avons pas étudiées que nous admettrons.

(i) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$. Puisque $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $Y = X + X + \cdots + X$. Ainsi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X + X + ... + X)$$

Donc, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) + \cdots + \mathbb{E}(X) \\ &= n\mathbb{E}(X) \\ &= np\end{aligned}$$

(ii)

■

Exercice 23.

Une association organise une tombola et vend un très grand nombre de tickets à gratter ?
On suppose que deux tickets sur dix sont gagnants.
Une personne achète au hasard vingt tickets.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants.

1. Donnez la loi de probabilité de X.
2. Sans justification donnez a valeur de k telle que $\mathbb{P}(x = k)$ soit maximale. Interprétez ce résultat.
3. Calculez l'espérance de X. Interprétez.

Exercice 24.

Un basketteur s'entraîne à tirer des lancers francs. On suppose que, quel que soit le résultat des tirs précédents, la probabilité qu'il réussisse est égale à 0,8. Il effectue une série de 30 tirs. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où il réussit son tir.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.
2. Calculez la probabilité que le basketteur
   (a) réussisse 18 tir exactement,
   (b) réussisse moins de 15 tirs,
   (c) réussisse au moins 20 tirs.
3. Déterminez le nombre moyen de tirs réussis.

Exercice 25.

Exercice 26.

Exercice 27.

III Échantillonnage.

Exercice 28.

Au cours d'une soirée, un restaurant accueille 45 convives.
Pour un convive quelconque il est établi par le restaurateur que la probabilité qu'il prenne un café à la fin du repas est exactement de 0,8.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cafés effectivement commandés à l'issue de la soirée. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(45; 0{,}8)$.

1. (a) Afficher informatiquement les valeurs de k et les probabilités correspondantes $\mathscr{P}(X = k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.
   (b) Donnez les valeurs de k pour lesquelles $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0{,}1$.
2. Toujours à l'aide de la machine, affichez les probabilités cumulées croissantes $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.
3. (a) Déterminez le plus petit nombre entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant 0{,}9$.
   Interprétez ce résultat dans le contexte.
   (b) Déterminez le plus grand nombre entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \leqslant 0{,}1$.
   (c) Déterminez un ensemble $[\![c,d]\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) \geqslant 0{,}95$.

Exercice 29.

Un site internet pose à tout usager une question de satisfaction à l'issue de sa visite ?
La probabilité qu'un usager réponde « non » à cette question est 0,17.
Un échantillon de 100 réponses prises au hasard a été constitué.
On note X le nombre de réponses « non » contenues dans cet échantillon.

1. (a) Quelle est la loi suivie par lé variable X ?
   (b) Avec la calculatrice, déterminez les valeurs de k pour lesquelles on a $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0{,}05$.
2. (a) À partir de quelle valeur de k a-t-on $\mathbb{P}(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$?
   Donnez une interprétation de ce résultat.
   (b) Déterminez un ensemble $[\![k,k']\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k') \geqslant 0{,}5$.

Exercice 30.

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

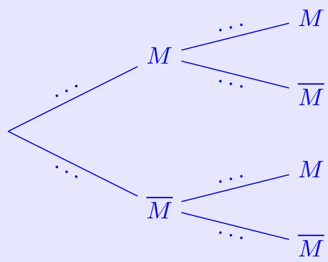
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. (a) Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   (b) Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Exercice 30. - Suite.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   (c) Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

IV Avec des variables aléatoires auxiliaires.

Exercice 31.

On joue à pile ou face cinq fois de suite. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu face.

1. Quelle loi suit X ? Donnez ses paramètres.

Pour jouer à ce jeu, il faut payer 3 €. On gagne 1 € à chaque fois qu'on obtient face lors d'un des cinq lancers.
On note Y la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) totale lors de ce jeu.

2. Exprimez Y en fonction de X.
3. Déduisez-en $\mathbb{E}(Y)$.
4. Ce jeu est-il financièrement intéressant ?
5. Quelle somme aurait-il fallu payer au départ pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 32.

Un tireur à l'arc atteint sa cible neuf fois sur dix. Ce tireur participe à un concours primé.
Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 € , sinon il perd 20 €. On suppose que les tirs sont indépendants.

1. On appelle X le nombre de flèches ayant atteint la cible à l'issue des cinq tirs.
   (a) Montrer que X suit une loi binomiale dont précisera les paramètres.
   (b) Déterminez la probabilité d'atteindre au moins 2 fois la cible.
2. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des cinq tirs.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
   (b) Déterminez la loi de Y.
   (c) Quel est le gain moyen (positif ou négatif) du tireur s'il participe un grand nombre de fois à ce concours ? Est-ce intéressant pour lui ?

Exercice 33.

Pour un avion à plusieurs réacteurs, on suppose que le risque de panne d'un des réacteurs est indépendant de l'état des autres réacteurs.
Soit p la probabilité de panne d'un réacteur.
On suppose que l'avion peut continuer à voler si au moins la moitié de ses réacteurs ne sont pas en panne.

1. On appelle X le nombre de réacteurs en panne sur un biréacteur. (Un biréacteur est un avion avec deux réacteurs.)
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (c) Déterminez $P(X \leqslant 1)$ en fonction de p.
2. On appelle Y le nombre de réacteurs en panne sur un quadriréacteur.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de Y ?
   (c) Déterminez $P(Y \leqslant 2)$ en fonction de p.
3. Comparez la sécurité offerte par un biréacteur à celle offerte par un quadriréacteur suivant les valeurs de p.

Exercice 34. ✷—

Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1 500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment.
Pour ce cavalier, la probabilité de franchir l'obstacle sans faute est de $\frac{2}{3}$. Le passage d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Quelle est la loi de probabilité de X.
2. Calculez l'espérance de X.
3. On appelle Y la variable aléatoire égale à la durée du parcours. Exprimez Y en fonction de X et donnez son espérance. Interprétez le résultat.

Correction de l'exercice 34

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(6, \frac{2}{3}\right)$.
2. $\mathbb{E}(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$.
3. $Y = \frac{1{,}5}{10} \times 60 + (6 - X)$. $\mathbb{E}(Y) = 15 - 4 = 11$.

Exercice 35. ✷—

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0{,}6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Exercice 35. - Suite.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

   On appelle :

   Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

   C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

   (b) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

   (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.

   Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

   (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Correction de l'exercice 35

Partie A.

1. 1.
2.
3. $\frac{1}{3}$.

Partie B.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(206; 0{,}95)$.
2. $\mathbb{E}(X) = 206 \times 0{,}95 = 195{,}7$.
3. $\mathbb{P}(X = 201) \approx 0{,}031$.
4. $\mathbb{P}(X \leqslant 200) \approx 0{,}948$. La probabilité qu'il n'y ait pas de problème de surréservation est de 0,948.
5. (a) $\mathbb{P}(Y = 6) = 6 \times 10^{-5}$.

   (b) $206 \times 250 = 51500$. Pour chaque sur-réservation la compagnie paye $250 + 600 = 850$ euros. D'où $Y = 51500 - 850Y$.

   (c)

c_i	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400
$P(C = c_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 006

   (d) $\mathbb{E}(Y) \approx 51424{,}97$.

   (e) $200 \times 250 = 50000$.

V Un peu plus.

Exercice 36.