

Raisonnement par récurrence.

Mode d'emploi.

EXERCICE 1.

1. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $p_0 = 1$ $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
3. Soient f une fonction définie et strictement croissante sur $] -1,5, +\infty[$. On note $\alpha \geq -0,5$ un point fixe de f , autrement dit $f(\alpha) = \alpha$. on pose $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$. Démontrez que $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.
5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite définie par : $v_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$. On considère $f : x \mapsto 1,6x - 1,6x^2$. Étudiez la monotonie de f sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis démontrez par récurrence que $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
6. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $p_1 = 1$ $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.
7. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et, pour tout nombre entier naturel n , $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$.
8. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$.
Après avoir démontré que $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{11} \right)$ est croissante sur $(\sqrt{11}, +\infty[$, démontrez que $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$ pour tout entier naturel n .
9. On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1700$ et $a_{n+1} = 0,75a_n + 300$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.
10. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$. Montrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{6x+2}{x+5}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Déduisez-en que pour tout entier naturel n , $u_n > 2$.
11. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$. Démontrez que $u_n \geq n + 1$.
12. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{-u_n-4}{u_n+3}$. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{-x-4}{x+3}$ est strictement croissante sur $] -3, +\infty[$ puis que pour tout entier naturel n , $-2 < u_n \leq u_{n+1}$.
13. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right) u_n, \end{cases}$ pour tout entier $n \geq 1$.
Montrez que pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \frac{n}{e^n}$.
14. On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto 2x(1 - x)$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis montrez que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
15. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.

Exercices.

EXERCICE 2. Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n .

1. $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.

2. $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
3. $n^3 - n$ est divisible par 3.
4. $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
5. $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

EXERCICE 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.

Démontrez, pour tout entier naturel n , que : $u_n = 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)$.

EXERCICE 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geq 2 : u_n = 2u_{n-1} - n$. Démontrez, pour tout entier naturel non nul n , que : $u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$.

EXERCICE 5. hachette repère 2012 terminale page 32 ex 32 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.

Démontrez, pour tout entier naturel n , que : $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$.

EXERCICE 6. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = 5u_n - 1$.

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n) .
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

EXERCICE 7. On définit par récurrence la **factorielle** d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante : $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $n! = 1 \times \dots \times n$.

EXERCICE 8. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$ est croissante.

EXERCICE 9. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2020$ est décroissante.

EXERCICE 10. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1,8$ est bornée par 1 et 2 et décroissante.

EXERCICE 11. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

2. Calculer u_1 et u_2 .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et bornée.

EXERCICE 12. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.
2. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$.
(b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et bornée.

EXERCICE 13. On considère la proposition suivante : $\mathcal{P}(n) : « 9 \text{ divise } 10^n + 1 »$.

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N} : 9 \text{ divise } 10^n - 1$.

4. Dédisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est fausse.

EXERCICE 14. Exprimez en fonction de n les sommes données.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{p=0}^n (4p-1). & \text{b)} \sum_{p=1}^{n-1} (3p+5). & \text{c)} \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n. & \text{d)} \sum_{p=1}^{n+1} 3 \times 5^{-n}. \\ \text{e)} \sum_{p=0}^{n-1} p(p+1). & \text{f)} \sum_{p=1}^{n+1} (p-2)^2. & \text{g)} \sum_{p=0}^n 3^{2p+1}. & \text{h)} \sum_{p=0}^{n-1} 3 \times 2^p - 1. \end{array}$$

EXERCICE 15. Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ , puis calculez-les.

$$\begin{array}{l} \text{a)} S = 5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 2012. \\ \text{b)} T = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \cdots + 2^{20}. \\ \text{c)} R = 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots + 10^{10}. \\ \text{d)} U = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \\ \text{e)} V = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

EXERCICE 16. Montrez, pour tout entier naturel n , que :

$$\text{a)} \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \text{b)} \sum_{i=0}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

EXERCICE 17. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i.$$

Aide. Pour l'hérédité on utilisera le fait que : $a^{n+1} - b^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$ et $a = (a-b) + b$.

EXERCICE 18. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = 5u_n - 1$.

1. Calculez les trois premiers termes de (u_n) .
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez cette conjecture.

EXERCICE 19. Montrez que la suite (u_n) définie ar $u_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n}$ est bien définie et périodique.

EXERCICE 20. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n k$. Considérons la propriété $\mathcal{P}(n) : S_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$. Démontrez que cette propriété est héréditaire mais qu'elle n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 21. Soit $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ un polynôme à coefficients réels. On suppose que P vérifie l'égalité : $P(x+1) - P(x) = x^2$.

1. Sans déterminer a et b , calculez $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(-1)$.
2. Calculez a et b .
3. Montrez par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $P(n)$ est un entier.
4. On pose $S_1 = 1$ et $S_n = 1 + 2^2 + \cdots + n^2$ (somme des carrés des $n+1$ premiers entiers naturels). Démontrez par récurrence les égalités : $S_n = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 22.

1. Avec la formule du binôme développez $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$.
2. On pose : $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$, n étant un entier naturel non nul.
3. Démontrez par récurrence que $S_n = 2n^4 - n^2$.
4. Déterminez l'entier n tel que $S_n = 29\,161$.

EXERCICE 23. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_n = \frac{n^3 - n}{3}$.

1. Calculez les cinq premiers termes de la suite.
2. Donnez l'expression de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
4. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.

EXERCICE 24. Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I . Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\mathcal{P} : \text{« pour tout } x \in I, f(x) \in I \text{ »},$$

alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

EXERCICE 25. Soient $f : I \rightarrow I$ une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrez que, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante.

EXERCICE 26.

— Baccalauréat S Métropole 12 septembre 2013 Exercice 4

Réurrence double.

EXERCICE 27. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$.

EXERCICE 28. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$. Conjecturez l'expression de u_n en fonction de n puis démontrez-la.

EXERCICE 29. travail libre 1 sur la suite de Fibonacci.

Réurrence forte.