

# Raisonnement par récurrence.

## Mode d'emploi.

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer des propriétés universelles,  $\mathcal{P}(n)$ , qui dépendent d'entiers naturels  $n$ .

La montée de l'échelle. Si j'affirme : « si on met un pied sur un barreau de l'échelle, alors on met, obligatoirement, l'autre pied sur le barreau supérieur » alors, pour peu que l'on mette un pied sur le barreau d'en bas il faudra grimper toute l'échelle.

**Théorème 1.** Soit  $\mathcal{P}(n)$  une proposition dépendant d'un entier naturel  $n$ . Si les deux assertions suivantes sont vraies

- (i)  $\mathcal{P}(0)$  est vraie,
- (ii) quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie alors, forcément,  $\mathcal{P}(n+1)$  est aussi vraie,

alors les assertions  $\mathcal{P}(n)$  sont vraies pour tous les entiers naturels  $n$ .

Remarques.

1. L'assertion (i) est appelée *l'initialisation*.
2. L'assertion (ii) est appelée *l'hérédité*.
3. L'initialisation commence avec  $n = 0$  mais, comme pour les suites, il est possible de commencer avec un autre rang.
4. Ce théorème, comme le théorème de Pythagore, est une implication. Pour le théorème de Pythagore il faut d'abord vérifier que  $ABC$  est rectangle en  $A$  pour pouvoir affirmer que l'égalité  $BA^2 + AC^2 = BC^2$ . De même pour utiliser le raisonnement par récurrence il faut vérifier que l'initialisation et l'hérédité sont vraies avant de pouvoir affirmer que toutes les assertions sont vraies.
5. L'assertion de l'hérédité contient à la fois une propriété universelle et une implication nous adopterons systématiquement la rédaction :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie et démontrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

...

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

6. Lorsqu'on écrit « Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie » on signifie que l'on admet que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Le fait que «  $\mathcal{P}(n)$  est vraie » est appelée *l'hypothèse de récurrence*.
7. Le raisonnement par récurrence ne permet pas de trouver un nouveau résultat mais il permet de démontrer qu'une conjecture est vraie.

Exemples.

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ .  
Démontrons par récurrence que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ .
  - \* Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $u_{k+1} \leq u_k \leq 3$ . Démontrons que  $u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 3$ .  
 $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 2$  est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement supérieur à 0 donc  $f$  est croissante.  
De l'hypothèse de récurrence :  $u_{k+1} \leq u_k \leq 3$  et de la croissance de  $f$  nous déduisons :  
 $f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(3)$ .  
Autrement dit :  $u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \frac{11}{4} \leq 3$ .
  - \* Montrons que :  $u_1 \leq u_0 \leq 3$ .  
 $u_0 = 3$  et  $u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{11}{4}$  donc  $u_1 \leq u_0 \leq 3$ .
  - \* Nous avons démontré par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ .
2. Démontrer une propriété.  
Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $4^n - 1$  est divisible par trois ».  
Démontrons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  en raisonnant par récurrence.

\* Initialisation. Il s'agit de démontrer que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie. Autrement dit que  $4^0 - 1$  est divisible par 3.

$4^0 - 1 = 0$  et  $3 \times 0 = 0$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

\* Hérédité.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie et démontrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Nous devons donc démontrer que  $4^{n+1} - 1$  est un multiple de 3.

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times (4^n - 1) + 3$$

D'après l'hypothèse de récurrence :  $3 \mid 4^n - 1$ .

Autrement dit il est possible d'écrire :  $4^n - 1 = 3 \times k$  où  $k$  est un nombre entier.

Donc

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 3k + 3 \\ &= 3(4k + 1) \end{aligned}$$

Autrement dit  $4^{n+1} - 1$  est divisible par 3.

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Nous avons démontré en raisonnant par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n - 1$  est divisible par 3.

### 3. Démontrer une formule. Ici la somme des entiers naturels jusqu'à $n$ .

Soit  $\mathcal{P}(n)$  : «  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  ».

Démontrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

\*  $0 = \frac{0 \times 1}{2}$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

\* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie et démontrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = n + 1 + \sum_{k=0}^n k$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(2+n)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

### 4. Démontrer la formule explicite du terme terme général d'une suite.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 8$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ .

Nous souhaitons démontrer que  $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Notons  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$  ».

Démontrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

\*

5. Démontrer qu'une suite définie par récurrence est croissante.  
Étudions la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = -1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ .
6. Démontrer un encadrement.  
Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ .  
Démontrons que pour tout  $n \in \mathbb{N} : 2 \leq u_n \leq 3$ .
7. Démontrer une inégalité.  
Démontrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \ll 2n + 1 \leq 2^n \gg$  est vraie.
8. De la nécessité de l'initialisation.  
 $\mathcal{P}(n) : \ll 4^n + 1$  est divisible par 3  $\gg$ .

\* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie et démontrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $4^n + 1 = 3k$  donc :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times (4^n + 1) - 4 + 1 \\ &= 4 \times 3k - 3 \\ &= 3(4k - 1) \end{aligned}$$

Autrement dit  $4^{n+1} + 1$  est divisible par 3.

\*  $4^0 + 1 = 1$  et  $3 \nmid 1$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est fausse.

Nous remarquons que l'hérédité ne suffit pas à démontrer que toutes les propositions sont vraies.

Nous pourrions même démontrer par l'absurde que  $4^n + 1$  n'est jamais divisible par 3.

#### 9. Inégalité de Bernoulli.

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B}(n) : \ll \heartsuit$  pour tout nombre  $x \geq 0$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$   $\gg$

\* Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

D'une part :  $(1+x)^0 = 1$

d'autre part :  $1 + 0 \times x = 1$ ,

donc :  $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$ .

$\mathcal{B}(0)$  est vraie.

\* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $\mathcal{B}(n)$  est vraie et démontrons que  $\mathcal{B}(n+1)$  est vraie.

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Puisque  $(1+x) \geq 0$  :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx)$$

En développant le membre de droite :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \quad (1)$$

Or, puisque  $nx^2 \geq 0$ ,

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \quad (2)$$

donc, par transitivité entre (1) et (2) :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

Autrement dit  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

\* Nous avons démontré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

## EXERCICE 1.

1. Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $p_0 = 1$   $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$ , quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrez que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n \geq 0,8$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = -1$  et, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$ . Démontrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ .
3. Soient  $f$  une fonction définie et strictement croissante sur  $] -1,5, +\infty[$ . On note  $\alpha \geq -0,5$  un point fixe de  $f$ , autrement dit  $f(\alpha) = \alpha$ . on pose  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Démontrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .
4. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_1 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$ . Démontrez que  $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$ .
5. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite définie par :  $v_0 = 0,1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$ . On considère  $f : x \mapsto 1,6x - 1,6x^2$ . Étudiez la monotonie de  $f$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  puis démontrez par récurrence que  $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ .
6. Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $p_1 = 1$   $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$ , quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrez que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$ .
7. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $v_0 = 6 \times 10^{21}$  et, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$ .
8. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 5$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{11}{u_n} \right)$ . Après avoir démontré que  $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{x}{11} \right)$  est croissante sur  $(\sqrt{11}, +\infty[$ , démontrez que  $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$  pour tout entier naturel  $n$ .
9. On considère la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $a_0 = 1700$  et  $a_{n+1} = 0,75a_n + 300$ . Démontrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$ .
10. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 8$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$ . Montrez que la fonction  $f : x \mapsto \frac{6x+2}{x+5}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Déduisez-en que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 2$ .
11. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$ . Démontrez que  $u_n \geq n + 1$ .
12. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{-u_n-4}{u_n+3}$ . Démontrez que la fonction  $f : x \mapsto \frac{-x-4}{x+3}$  est strictement croissante sur  $] -3, +\infty[$  puis que pour tout entier naturel  $n$ ,  $-2 < u_n \leq u_{n+1}$ .
13. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) u_n, \text{ pour tout entier } n \geq 1 \end{cases}$$
 Montrez que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n = \frac{n}{e^n}$ .

14. On étudie la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0,3$  et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel  $n : u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ . Démontrez que la fonction  $f : x \mapsto 2x(1 - x)$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  puis montrez que  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ .
15. Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$ . Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 2n$ .

## Exercices.

EXERCICE 2. Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel  $n$ .

- $2^{n+4} + 3^{3n+2}$  est divisible par 5.
- $3^{6n+2} - 2$  est divisible par 7.
- $n^3 - n$  est divisible par 3.
- $4^n - 1 - 3n$  est divisible par 9.
- $7 \times 3^{5n} + 4$  est divisible par 11.

EXERCICE 3. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour  $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ . Démontrez, pour tout entier naturel  $n$ , que :  $u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$ .

EXERCICE 4.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $u_1 = 5$  et, pour  $n \geq 2 : u_n = 2u_{n-1} - n$ . Démontrez, pour tout entier naturel non nul  $n$ , que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

EXERCICE 5.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour  $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3u_n + n + 1$ . Démontrez, pour tout entier naturel  $n$ , que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

EXERCICE 6.

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

- Calculez les trois premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
- Conjecturez son expression explicite.
- Démontrez la.

EXERCICE 7.

On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel  $n$  et que l'on note  $n!$  de la façon suivante :

$$0! = 1 \text{ et } (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Démontrez que pour tout entier  $n$  supérieur ou égale à 1,  $n! = 1 \times \cdots \times n$ .

EXERCICE 8.

Montrez par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = -2$  est croissante.

EXERCICE 9.

Montrez par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 2020$  est décroissante.

### EXERCICE 10.

Montrez par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 1,8$  est bornée par 1 et 2 et décroissante.

### EXERCICE 11.

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $g(x) = 2x - x^2$ .

1. Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$  et préciser les valeurs de  $g(0)$  et de  $g(1)$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ .
4. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et bornée.

### EXERCICE 12.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $f(x) = 2xe^{-x}$ .

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

1. Résoudre sur l'intervalle  $[0; 1]$  l'équation  $f(x) = x$ .
2. (a) Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$ .  
(b) Donner le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0,1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ .  
(b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante et bornée.

### EXERCICE 13.

On considère la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \ll 9 \text{ divise } 10^n + 1 \gg.$$

1. Démontrez, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , que : si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
2. Qu'en est-il de  $\mathcal{P}(0)$ ,  $\mathcal{P}(1)$ ,  $\mathcal{P}(2)$  et  $\mathcal{P}(3)$ ? Que semble-t-il légitime de conjecturer?
3. Montrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $9 \text{ divise } 10^n - 1$ .
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est fausse.

### EXERCICE 14.

Exprimez en fonction de  $n$  les sommes données.

a)  $\sum_{p=0}^n (4p - 1).$

c)  $\sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

e)  $\sum_{p=0}^n p(p+1).$

g)  $\sum_{p=0}^n 3^{2p+1}.$

b)  $\sum_{p=1}^{n-1} (3p + 5).$

d)  $\sum_{p=1}^{n+1} 3 \times 5^{-n}.$

f)  $\sum_{p=1}^{n-1} (p-2)^2.$

h)  $\sum_{p=0}^n 3 \times 2^p - 1.$

### EXERCICE 15.

Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole  $\Sigma$ , puis calculez-les.

- a)  $S = 5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 2012$ .
- b)  $T = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \cdots + 2^{20}$ .
- c)  $R = 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots + 10^{10}$ .
- d)  $U = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .
- e)  $V = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .

### EXERCICE 16.

Montrez, pour tout entier naturel  $n$ , que :

$$\text{a) } \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \text{b) } \sum_{i=0}^n i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

### EXERCICE 17.

Démontrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , que :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i.$$

*Aide.* Pour l'hérédité on utilisera le fait que :  $a^{n+1} - b^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$  et  $a = (a - b) + b$ .

### EXERCICE 18.

### EXERCICE 19.

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et } u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n.$$

### EXERCICE 20. D

Soit  $I$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ .

Montrez que, si la fonction  $f$  vérifie la propriété :

$$\mathcal{P} : \text{« pour tout } x \in I, f(x) \in I \text{ »,}$$

alors on peut définir sur  $\mathbb{N}$  la suite numérique  $(u_n)$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique  $(u_n)$  vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

### EXERCICE 21. D

Soient  $f : I \rightarrow I$  une fonction croissante,  $u_0 \in I$  et  $(u_n)$  la suite définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrez que, si  $u_0 > u_1$ , alors  $(u_n)$  est décroissante.

### EXERCICE 22. D

— Baccalauréat S Métropole 12 septembre 2013 Exercice 4

**Récurrence double.**

**Récurrence forte.**