Rédiger une démonstration.

Égalité.

EXERCICE 1. Soient $A = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ et $B = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2}$ des nombres réels. Démontrez que $A = B$.

EXERCICE 2. Soient $P(x) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}$ et $Q(x) = 3(x+1)(x-2)$. Démontrez que $P = Q$.

EXERCICE 3.

1. Démontrez que $\frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$ pour tout réel x distinct de -1.
2. Démontrez que les fonctions $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$ et $x \mapsto x - 1$ ne sont pas égales.

EXERCICE 4. Soient $A(2;3)$, $B(4,-2)$, $C(8;2)$ et $D(10;-3)$. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

Quantificateur existentiel.

Quantificateur universel.

EXERCICE 5. Démontrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

Des doppelgängers.

EXERCICE 6. Donnez la négation des phrases suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 3$.
2. Il existe un point de la droite (AB) d'ordonnée 4.

Implication.

EXERCICE 7. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Démontrez la proposition : « si $k > 0$ et si u est une fonction croissante sur I, alors la fonction ku est croissante sur I. »

EXERCICE 8. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Démontrez que la proposition suivante est fausse : « si u et v sont des fonctions croissantes sur I, alors la fonction uv est croissante sur I. »

Unicité.

Le problème de l'unicité d'un élément x vérifiant une proposition $\mathscr{P}(x)$ apparaît souvent (notamment dans les définitions).

EXERCICE 9. Montrez que lorsqu'un nombre réel peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$, les entiers a et b sont nécessairement uniques.

Disjonction des cas.

Disjonction.

EXERCICE 10. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \max\left\{x^2,(x-2)^2\right\} \geq 1$.

Montrer une appartenance.

EXERCICE 11. On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On note $E = \{M \in \mathscr{P} \mid OM^2 = 2\}$ et $A\left(\frac{sqrt2}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. Démontrez que $A \in E$.

Montrer une inclusion.

EXERCICE 12. Notons $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et posons $E = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Démontrez : $E \subset 2\mathbb{N}$.

Montrer une égalité d'ensembles.

Équivalence.

EXERCICE 13. Dans les cas suivants précisez sans justification si les propositions A et B sont équivalentes ou si l'une implique l'autre.

a) A : « $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 > 36$ » ; B : « $x \in \mathbb{R}$ et $x > 6$ ».
b) A : « $x \in [0,2\pi]$ et $\cos x = 1$ » ; B : « $x \in \left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ ».
c) A : « $x \in \mathbb{R}$ et $\sin x \geq 0$ » ; B : « $x \in [0,\pi]$ ».

EXERCICE 14. Démontrez que : $\forall x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

Raisonnement par l'absurde.

Pour démontrer qu'une proposition est vraie il est possible de supposer qu'elle soit fausse et montrer que cette supposition conduit à une contradiction.

Il faut commencer sa démonstration en écrivant

« Supposons que $\mathscr{P}$ est fausse. »
On fait apparaître une contradiction.
« Ceci contredit notre hypothèse donc $\mathscr{P}$ est vraie. »

EXERCICE 15. Démontrez : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\},\ \frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

Raisonnement par récurrence.

EXERCICE 16. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant 4$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite à préciser.

Raisonnement par analyse-synthèse.

EXERCICE 17. Déterminez les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

EXERCICE 18. *Question 1 du problème du sujet de bac d'avril 1994 de Pondichéry.* Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel, $xP'(x) - 3P(x) = 0$.

Exercices.

EXERCICE 19. Démontrez, en utilisant la définition de la monotonie, que la fonction proposée est strictement monotone sur l'intervalle proposé.

a) La fonction racine carrée, $f : x \mapsto \sqrt{x}$, sur $[0; +\infty[$,
b) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x+5}$ sur $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$,
c) La fonction $h : x \mapsto \sqrt{5-x}$ sur $]-\infty; 5]$,
d) La fonction $k : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ sur $]-\infty; -2]$, puis sur $[-2; +\infty[$.

EXERCICE 20. Démontrez : $\forall x \in [0,1],\ x - x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0,1\}$.
EXERCICE 21. Soient I un intervalle non trivial et f une fonction dérivable sur I. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$\mathscr{P}_1$: « Si f est strictement croissante sur I, alors f' est strictement positive sur I. »

$\mathscr{P}_2$: « Si f est croissante et strictement positive sur I, alors $\frac{1}{f}$ est décroissante sur I.

EXERCICE 22. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez que $(\forall \varepsilon > 0,\ |z| < \varepsilon) \Rightarrow z = 0$.
EXERCICE 23. Soit f la fonction définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{2x-1} \end{array} \right.$. Montrez que pour tout $y \neq \frac{1}{2}$, il existe $x \neq \frac{1}{2}$, tel que $f(x) = y$.
EXERCICE 24. Déterminez l'ensemble $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x{,}x \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)\}$.
EXERCICE 25. Montrez que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une unique façon d'une fonction paire et d'une fonction impaire.