Rédiger une démonstration.

Les éléments de démonstration vus dans cette leçon peuvent être vus comme des plans de rédaction. Une rédaction, comme en littérature, nécessite une introduction, un développement et une conclusion.

Égalité.

Quantificateur existentiel.

Pour démontrer qu'« il existe un x tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie » (qu'on note $\exists x,\ \mathscr{P}(x)$), il suffit de trouver un exemple de valeur de x qui vérifie la proposition.

Il y a trois façon de procéder, dans cet ordre :

1. Recherche d'une valeur évidente de x (essayer des choses simples).
2. Utilisation d'un théorème d'existence vu en cours (fonction réciproque d'une bijection comme pour ln, antécédent avec le théorème des valeurs intermédiaires).
3. Procéder à une recherche- démonstration par analyse-synthèse (à faire au brouillon éventuellement).

Rédaction type :

> « Posons $x = \dots$.
> Vérifions que $\mathscr{P}(x)$ (est vraie). »
> *suivi de la vérification que pour cette valeur particulière de x, $\mathscr{P}(x)$ est vraie.*

Exemples.

1. Démontrons la véracité de la proposition : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 3 = 0$.
   Voyons les trois moyens d'aborder la recherche de la valeur de x.
   (a) On peut exhiber une racine évidente : 1 est clairement une racine.
   (b) Utiliser un résultat de cours qui permet de trouver une racine. Nous savons que les trinômes de degré deux admettent au moins une racine si et seulement si le discriminant associé est positif.
   (c) Ici la recherche par analyse synthèse pour s'apparenter à la démonstration de la méthode avec le discriminant.

   $1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$ donc 1 est bien racine du trinôme.

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 3 = 0.}$$

Quantificateur universel.

Pour démontrer que pour tout $x \in E$, $\mathscr{P}(x)$ est vraie (qu'on note $\forall x,\ \mathscr{P}(x)$) plusieurs approches sont possibles.

1. Il faut le vérifier pour un x quelconque. Confer la rédaction et l'exemple ci-dessous.
2. Utiliser un résultat qui concerne un objet qui contient toutes les valeurs de x (propriété d'une fonction, et cetera).
3. Si n représente un entier naturel une démonstration par récurrence est à envisager.

Rédaction type pour une démonstration directe :

« Soit $x \in E$.
Montrons que $\mathscr{P}(x)$ (est vraie). »
suivi de la preuve que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

Exemples.

1. Montrons que « Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[3, +\infty[$, on a $x^2 + 4x + 3 \geq 0$. »
   Soit $x \in [3, +\infty[$.
   Montrons que $x^2 + 4x + 3 \geq 0$.
   $x \geqslant 3$ donc, la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$x^2 \geqslant 3^2 x^2 \qquad\qquad \geqslant 9 \quad (1)$$

   $x \geqslant 3$ donc, 4 étant strictement positif

$$4x \geqslant 4 \times 3$$
$$4x \geqslant 12 \quad (2)$$

   En sommant les inégalités (1) et (2) :

$$x^2 + 4x \geqslant 9 + 12$$
$$x^2 + 4x \geqslant 21$$
$$x^2 + 4x + 1 \geqslant 21 + 1$$
$$x^2 + 4x + 1 \geqslant 22$$
$$x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$$

Nous avons démontré : $\forall x \in [3; +\infty[, \ x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

EXERCICE 1. Démontrez : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

Des doppelgängers.

Il peut être plus simple de démontrer la négation d'une phrase.

La négation d'une proposition avec un quantificateur existentiel est une proposition avec un quantificateur universel : $\left(\overline{\exists x, \ \mathscr{P}(x)}\right) \Longleftrightarrow (\forall x, \ \mathscr{P}(x))$.

La négation d'une proposition avec un quantificateur universel est une proposition avec un quantificateur existentiel : $\left(\overline{\forall x, \ \mathscr{P}(x)}\right) \Longleftrightarrow (\exists x, \ \mathscr{P}(x))$

EXERCICE 2. Donnez la négation des phrases suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 3$.
2. Il existe un point de la droite (AB) d'ordonnée 4.

Implication.

Pour démontrer une implication, $A \Rightarrow B$, on suppose que A est vraie et on démontre qu'alors B est vraie.

Il faut commencer sa démonstration en écrivant

« Supposons que A est vraie.
Démontrons qu'alors B est vraie »
suivi de la preuve de B.

Remarques.

1. Dans « $A \Rightarrow B$ », A constitue les hypothèses et B la conclusion.
2. Cela peut sembler paradoxal, mais si A est faux alors l'implication $A \Rightarrow B$ est toujours vraie (quelque soit la valeur de vérité de B). C'est pourquoi dans la démonstration on suppose que A est vrai.
3. On trouve parfois $\Rightarrow$ à la place de « donc ». En fait lorsqu'on utilise donc nous faisons un syllogisme : si A est vraie et que $A \Rightarrow B$, alors B est vraie.

EXERCICE 3. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Démontrez la proposition : « si $k > 0$ et si u est une fonction croissante sur I, alors la fonction ku est croissante sur I. »

Pour démontrer qu'une implication, $A \Rightarrow B$ est fausse, on montre qu'il est possible que A soit vraie et que pourtant B soit fausse. Il faut donc en général trouver un contre-exemple.

Il faut commencer sa démonstration en écrivant

« Démontrons que A est vraie. »
suivi de la preuve de A est vraie.
« Démontrons que B est fausse. »
suivi de la preuve que B est fausse.

EXERCICE 4. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Démontrez que la proposition suivante est fausse : « si u et v sont des fonctions croissantes sur I, alors la fonction uv est croissante sur I. »

Unicité.

Le problème de l'unicité d'un élément x vérifiant une proposition $\mathscr{P}(x)$ apparaît souvent (notamment dans les définitions).

unicité

Pour démontrer l'unicité de l'élément x vérifiant la propriété $\mathscr{P}(x)$ il faut vérifier que si deux éléments vérifient la propriété alors ils sont égaux. Autrement dit on démontre une implication.

Il faut commencer sa démonstration en écrivant

« Soit x et x' deux éléments tels que $\mathscr{P}(x)$ et $\mathscr{P}(x')$ soient vraies.
Montrons que : $x = x'$. »
suivi de la preuve $x = x'$.

Remarques.

1. La question de l'unicité apparaît notamment dans des propositions avec le symbole $\exists!$ qui signifie « il existe un et un seul » ou « il existe un unique ». Dans ce cas la démonstration se fait en deux temps d'abord l'existence puis l'unicité.

EXERCICE 5. Montrez que lorsqu'un nombre réel peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$, les entiers a et b sont nécessairement uniques.

Disjonction des cas.

Lorsqu'un problème est complexe on démontrera en distinguant les différents cas qui nécessitent des raisonnements différents.

Disjonction.

Pour démontrer une disjonction $\mathscr{P} = A$ ou B il faut s'assurer que si A (ou B) n'est pas vraie alors l'autre l'est forcément.

Il faut commencer sa démonstration en écrivant

> « Supposons que A est faux.
> Montrons que B est vraie. »
> *suivi de la preuve de la véracité de B.*

EXERCICE 6. Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \max\left\{x^2,(x-2)^2\right\} \geq 1$.

Montrer une appartenance.

Pour montrer que $e \in E = \{x \mid \mathscr{P}(x)\}$ il suffit de vérifier que $\mathscr{P}(e)$ est vraie.

Montrer une inclusion.

Démontrer l'inclusion $E \subset F$ revient à démontrer que tout élément de E est aussi élément de F : $\forall x \in E,\ x \in F$.

Il faut commencer sa démonstration en écrivant

> « Soit $x \in E$.
> Montrons que $x \in F$. »
> *suivi de la preuve que x est élément de F.*

EXERCICE 7. Notons $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et posons $E = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Démontrez : $E \subset 2\mathbb{N}$.

Pour démontrer qu'il n'y a pas d'inclusion, $E \not\subset F$, il faut démontrer une propriété existentielle : s'il existe (au moins) un élément x de E qui ne soit pas dans F alors $E \not\subset F$.

Montrer une égalité d'ensembles.

Pour montrer une égalité d'ensembles , $E = F$, on démontre une double inclusion : $E \subset F$ et $F \subset E$.

Il est parfois possible de démontrer en travaillant par équivalence grâce aux propriétés des ensembles : $x \in E \iff \mathscr{P}(x) \iff \cdots \iff \mathscr{Q}(x) \iff x \in F$.

Équivalence.

Pour montrer une équivalence, $A \iff B$, on peut :

1. démontrer une double implication : $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
2. démontrer des équivalences successives en modifiant les propositions A ou B : $A \iff \cdots \iff B$.
3. démontrer par conditions nécessaires et suffisante comme dans une démonstration par analyse-synthèse.

EXERCICE 8. Dans les cas suivants précisez sans justification si les propositions A et B sont équivalentes ou si l'une implique l'autre.

1. A : « $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 > 36$ » ; B : « $x > 6$ ».
2. A : « $x \in [0,2\pi]$ et $\cos x = 1$ »
   B : « $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ ».

3. A : « $x \in \mathbb{R}$ et $\sin x \geq 0$ »
   B : « $x \in [0,\pi]$ ».

EXERCICE 9. Démontrez que : $\forall x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

Raisonnement par l'absurde.

Pour démontrer qu'une proposition est vraie il est possible de supposer qu'elle soit fausse et montrer que cette supposition conduit à une contradiction.

Il faut commencer sa démonstration en écrivant

> « Supposons que $\mathscr{P}$ est fausse. »
> *On fait apparaître une contradiction.*
> « Ceci contredit notre hypothèse donc $\mathscr{P}$ est vraie. »

EXERCICE 10. Démontrez : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\},\ \frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

Raisonnement par récurrence.

En langage formel mathématique dire que le raisonnement par récurrence est valable signifie que la proposition suivante est vraie.

$$\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

Confer les exemples de rédaction dans la leçon correspondante.

EXERCICE 11. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 4$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite à préciser.

Raisonnement par analyse-synthèse.

Ce raisonnement est celui naturellement utilisé lorsqu'on vous demande de « déterminer » ou de « trouver » un nombre, un objet ou autre.

Il s'agit de la démarche de recherche de la solution : s'il y a une solution à quoi ressemble-t-elle ? la possible réponse que j'ai trouvé convient-elle effectivement ?

Pour démontrer qu'un élément x d'un ensemble E vérifie une propriété $\mathscr{P}$ nous raisonnerons comme suit.

> *Analyse.* « Soit $x \in E$.
> Supposons que $\mathscr{P}(x)$ est vraie. »
> *On regarde alors les conséquences sur x : quelle est sa nature sa forme. Ce faisant en regardant les propriéts de x nous réduisons le possibilités de valeurs pour x.*
>
> *Synthèse.* « Soit $x = \ldots$ (les valeurs possibles précédemment trouvées).
> Vérifions que $x \in E$ et que $\mathscr{P}(x)$ est vraie. »
> *On vérifie alors que x est bien un élément de E et qu'il vérifie la propriété $\mathscr{P}$.*

Remarques.

1. Ce raisonnement est également utilisé pour démontré l'existence et l'unicité. L'analyse permet souvent d'établir l'unicité et la synthèse l'existence.
2. Il est également possible que la phase d'analyse ne conduise à aucune solution. Dans ce cas une présentation sous forme de raisonnement par l'absurde est préférable.

EXERCICE 12. Déterminez les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

EXERCICE 13. *Question 1 du problème du sujet de bac d'avril 1994 de Pondichéry.* Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel, $xP'(x) - 3P(x) = 0$.

Exercices.

EXERCICE 14. Démontrez, en utilisant la définition de la monotonie, que la fonction proposée est strictement monotone sur l'intervalle proposé.

a) la fonction racine carrée, $f : x \mapsto \sqrt{x}$, sur $[0; +\infty[$,
b) la fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x+5}$ sur $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$,
c) la fonction $h : x \mapsto \sqrt{5-x}$ sur $]-\infty; 5]$,
d) la fonction $k : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ sur $]-\infty; -2]$, puis sur $[-2; +\infty[$.

EXERCICE 15. Démontrez : $\forall x \in [0,1],\ x - x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0,1\}$.

EXERCICE 16. Soient I un intervalle non trivial et f une fonction dérivable sur I. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$\mathscr{P}_1$: « Si f est strictement croissante sur I, alors f' est strictement positive sur I. »

$\mathscr{P}_2$: « Si f est croissante et strictement positive sur I, alors $\frac{1}{f}$ est décroissante sur I.

EXERCICE 17. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez que $(\forall \varepsilon > 0,\ |z| < \varepsilon) \Rightarrow z = 0$.

EXERCICE 18. Soit f la fonction définie par $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{2x-1} \end{array}\right.$. Montrez que pour tout $y \neq \frac{1}{2}$, il existe $x \neq \frac{1}{2}$, tel que $f(x) = y$.

EXERCICE 19.

Déterminez l'ensemble

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x,x \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)\}$$

EXERCICE 20.

Montrez que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une unique façon d'une fonction paire et d'une fonction impaire.