Assertions quantifiées.

Propriétés universelles et quantificateur universel.

EXERCICE 1. Démontrez : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.
EXERCICE 2. Démontrez que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \geqslant 0$

Quantificateur existentiel.

EXERCICE 3. Démontrez qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $8x^2 - 5x - 3 = 0$.
EXERCICE 4. Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan euclidien, $M \in \mathscr{D}$ et A un point du plan. Justifier qu'il existe un point B de $\mathscr{D}$ tel que $AB \leqslant AM$.
EXERCICE 5.

1. Démontrez qu'il existe un réel α tel que $\alpha^2 = 81$.
2. Démontrez qu'il existe un réel β tel que $\beta^2 = 2$.

Des doppelgängers.

EXERCICE 6. Donnez la négation des phrases suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 3$.
2. Il existe un point de la droite (AB) d'ordonnée 4.

Exercices.

EXERCICE 7. On considère la proposition F : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x - y = 0$ ».

1. Exprimez en langage courant la proposition F.
2. Déterminez la valeur de vérité de F.

EXERCICE 8. On considère la proposition G : « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 7 = 0$.

1. Exprimez en langage courant la proposition G.
2. Déterminez la valeur de vérité de G.

EXERCICE 9. Donnez la négation des phrases suivantes puis déterminez si elles sont vraies ou fausses.

a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.

EXERCICE 10. Soient A et B des points distincts du plan, M un point. Démontrez que la proposition suivante est fausse : « Si $AM = MB$ alors M est le milieu de $[AB]$ ».
EXERCICE 11. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Écrivez à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes et leurs négations.

a) « f est une application nulle »
b) « f s'annule »
c) « f est à valeurs strictement positives »
d) « f est constante »

EXERCICE 12. Traduisez en langage courant les propositions mathématiques suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$.
b) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ \dfrac{3}{x-2} = 5$.
c) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x > 0,\ \dfrac{1}{x} < \varepsilon$.
d) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [3;+\infty[,\ -2x^2 + 6x + 1 \geq M$.

EXERCICE 13. Ajoutez devant chaque proposition un quantificateur possible en justifiant.

a) $\ldots,\ |x-3| = 2$.
b) $\ldots,\ |x-3| > 2$.
c) $\ldots,\ \dfrac{1-6x}{2x+5} = -3$.
d) $\ldots,\ 4\sqrt{2x+7} > x + 11$.

EXERCICE 14. Des propositions en vrac.

a) La proposition suivante est-elle vraie : « $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x » ?
b) La proposition suivante est-elle vraie : « $|x| \geqslant 2$ pour tout $x \in]7;13[$ » ?
c) Démontrez l'implication suivante : si x est un nombre réel tel que $x^2 < 1$, alors $x > 1$. Sa réciproque est-elle vraie ?
d) Démontrez la véracité de la proposition : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 3 = 0$.