Assertions quantifiées.

Certaines assertions dépendent d'une variable si bien que ce ne sont pas vraiment des assertions puisque qu'on ne peut dire si elles sont vraies ou fausses ; on parle plutôt de prédicat. Ainsi $x \geqslant 2$ n'est ni vraie ni fausse, cela dépend de la valeur de x. Pour $x = 3$, $x \geqslant 2$ est vraie. Nous allons voir deux façon de compléter les prédicats pour en faire des assertions.

Propriétés universelles et quantificateur universel.

Définition 1. On dit d'une assertion que c'est une *propriété universelle* lorsqu'elle formée d'un prédicat $P(x)$ et que l'on précise les valeurs de x.

Exemples.

1. La proposition $\mathscr{P}(x)$: « $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est vraie quel que soit $x \in]0; 1[$.
2. « Pour tout $x \in]0; 2[$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est fausse puisque, par exemple, pour $x = 1$, on a $\frac{1}{1} = \frac{1}{1^2}$.
3. L'assertion $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est un multiple de 3. » est vraie pour tout nombre entier naturel n. Cependant la démonstration n'est pour l'instant pas aisée.

Remarques.

1. Les propriétés universelles sont des phrases qui contiennent le plus souvent les expressions « quel que soit » ou « pour tout ».
2. Il existe un symbole mathématique pour signifier « pour tout » appelé le *quantificateur universel* et noté $\forall$.
3. Pour démonter qu'une proposition universelle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple et éventuellement de vérifier que c'est un contre-exemple.

Le symbole $\forall$ est appelé le *quantificateur universel* et signifie « pour tout ».

Il est utilisé pour écrire un langage formel. Par exemple la proposition « Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[3; +\infty[$, on a $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ » s'écrira

$$\forall x \in [3; +\infty[,\ x^2 - 4x + 3 \geq 0.$$

Pour démontrer que pour tout $x \in E$, $\mathscr{P}(x)$ est vraie il faut le vérifier pour un x quelconque.

Rédaction type :

> « Soit $x \in E$.
> Montrons que $\mathscr{P}(x)$ (est vraie). »
> *suivi de la preuve que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.*

Remarques.

1. La proposition ci-dessus traduit une implication : si $x \geq 3$, alors $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.
2. Si $\mathscr{P}(x)$ est un proposition dépendant de x, alors pour démontrer que « pour tout x, $\mathscr{P}(x)$ est vraie », il faut en général démontrer que $\mathscr{P}(x)$ est vraie en remplaçant x par n'importe quel nombre.
3. Lorsqu'une proposition universelle dépend d'une variable entière, $n \in \mathbb{N}$, il est souvent pertinent de la démontrer avec un raisonnement par récurrence (qui est expliqué plus loin).

Exemples.

1. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est impair alors n^2 est impair. » est une assertion qui est vraie.
Démontrons-le.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que n est impair et démontrons qu'alors forcément n^2 est aussi impair.
Puisque n est impair il peut s'écrire $n = 2k + 1$ où k est un certain entier.
Donc :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 \\ &= 2 \times (2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Ainsi n^2 est de la forme $2p+1$ où p est un nombre entier. Autrement dit n^2 est impair.
Concluons : nous avons démontré que, quel que soit l'entier n, si n est impair, alors, nécessairement, n^2 est aussi impair.

EXERCICE 1.
Démontrez

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

Quantificateur existentiel.

Le symbole $\exists$ est appelé le *quantificateur existentiel* et signifie « il existe (au moins) un(e) ».

Il est utilisé pour écrire un langage formel. Par exemple, « Il existe un nombre x réel tel que : $x^2 - 4x + 3 = 0$ » s'écrira comme la proposition

$$\exists x \in \mathbb{R}, \; x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Pour démontrer qu'« il existe un x tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie », il suffit de trouver un exemple de valeur de x qui vérifie la proposition.

Rédaction type :

« Posons $x = \dots$.
Vérifions que $\mathscr{P}(x)$ (est vraie). »
suivi de la vérification que pour cette valeur particulière de x, $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

Remarques.
1. Trouver une valeur qui convienne pour x peut être très astucieux voire même difficile.
2. Certaines existences peuvent être établies grâce à un théorème d'existence vu en classe. Ces théorèmes sont donc très puissants.
3. S'il n'y a pas de solution simple ou de théorème il faut essayer de procéder à un raisonnement par analyse-synthèse.
4. On trouve un quantificateur dérivé de celui-ci : $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ». On adjoint à l'existence la notion d'unicité.On peut penser au théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone.

Des doppelgängers.

La négation d'une proposition avec un quantificateur existentiel est une proposition avec un quantificateur universel. Une règle qui ne s'applique pas à tous c'est qu'il y a au moins qui ne la respecte pas : la négation de $\forall$ est $\exists$.

La négation d'une proposition avec un quantificateur universel est une proposition avec un quantificateur existentiel. S'il n'existe pas un seul élève qui intègre une grande école c'est que tous on échoué : la négation de $\exists$ est $\forall$.

EXERCICE 2. Donnez la négation des phrases suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 3$.
2. Il existe un point de la droite (AB) d'ordonnée 4.

Exercices.

EXERCICE 3. On considère la proposition F : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 2x - y = 0$ ».

1. Exprimez en langage courant la proposition F.
2. Déterminez la valeur de vérité de F.

EXERCICE 4. On considère la proposition G : « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 7 = 0$.

1. Exprimez en langage courant la proposition G.
2. Déterminez la valeur de vérité de G.

EXERCICE 5. Donnez la négation des phrases suivantes puis déterminez si elles sont vraies ou fausses.

a) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.

EXERCICE 6. Soient A et B des points distincts du plan, M un point. Démontrez que la proposition suivante est fausse : « Si $AM = MB$ alors M est le milieu de $[AB]$ ».

EXERCICE 7. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Écrivez à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes et leurs négations.

1. « f est une application nulle »
2. « f s'annule »
3. « f est à valeurs strictement positives »
4. « f est constante »

EXERCICE 8. Traduisez en langage courant les propositions mathématiques suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$.
2. $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ \dfrac{3}{x-2} = 5$.
3. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x > 0,\ \dfrac{1}{x} < \varepsilon$.
4. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [3; +\infty[,\ -2x^2 + 6x + 1 \geq M$.

EXERCICE 9. Ajoutez devant chaque proposition un quantificateur possible en justifiant.

1. $\dots,\ |x-3| = 2$.
2. $\dots,\ |x-3| > 2$.
3. $\dots,\ \dfrac{1-6x}{2x+5} = -3$.
4. $\dots,\ 4\sqrt{2x+7} > x + 11$.

EXERCICE 10. Des propositions en vrac.

1. La proposition suivante est-elle vraie : « $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x » ?
2. La proposition suivante est-elle vraie : « $|x| \geqslant 2$ pour tout $x \in]7;13[$ » ?
3. Démontrez l'implication suivante : si x est un nombre réel tel que $x^2 < 1$, alors $x > 1$. Sa réciproque est-elle vraie ?
4. Démontrez la véracité de la proposition : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 3 = 0$.