Logique binaire et assertion.

Dans cette leçon ce ne sont pas des recette de démonstration que nous voyons mais les notions de vrai, de faux et de la valeur de véracité des raisonnements qui les combinent. Pour un aspect plus pratique (comment rédiger vos travaux reportez vous à la leçon correspondante.

Logique : propositions, assertions.

Définition 1. Une *assertion* est une phrase qui peut être soit vraie soit fausse.

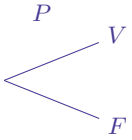
Exemples.

1. L'assertion « le carré de -3 est négatif » est fausse.
2. L'assertion $\mathscr{P}$: « $\sqrt{2}$ est irrationnel » est vraie.
3. $4x + 5$ n'est pas une assertion.

Remarques.

1. Les assertions sont aussi appelées des propositions. Cependant l'usage a consacré l'utilisation de ce mot pour désigner une phrase vraie. Nous utiliserons donc le mot proposition pour désigner un théorème de moindre importance.
2. L'utilisation du « soit... soit... » correspond à ce que nous appellerons plus loin le « ou exclusif ». Les deux possibilités s'excluent mutuellement. Une assertion ne peut être à la fois vraie et fausse.
3. Les assertions sont des phrases mathématiques. Pour reconnaître une assertion il suffit de la lire à haute voix en français et s'assurer qu'elle comporte un verbe.
4. On peut reconnaître une assertion au fait que l'on doit pouvoir en dire qu'elle est soit vraie soit fausse. « vrai » et « faux » sont appelés les *valeurs* des l'assertion.
5. Les deux valeurs logiques sont vraies et faux. Nous le noterons V et F. L'usage, notamment en informatique mais aussi en mathématique, est de les noter 1 et 0 respectivement.
6. Pour une proposition P cette situation est représentée par une *table de vérité* ou un arbre :

P
V
F



7. Nous allons manipuler les assertions comme d'autres objets mathématiques c'est pourquoi nous les nommerons P, Q, et cetera.

Négation.

Définition 2. La *négation* d'une assertion P, que nous noterons $\overline{P}$, est l'assertion qui prend des valeurs (logiques) contraires à celles de P.

La table de vérité qui définit $\overline{P}$ est

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemples.

1. La négation de $2x + 3 = 4$ est $2x + 3 \neq 4$.
2. La négation de la proposition $\mathscr{P}$: « $x \geqslant 5$ » est $\overline{\mathscr{P}}$: « $x < 5$ ».
3. Il n'est pas toujours simple d'exprimer la négation d'une assertion : P :« $\mathcal{C}$ est un cercle », Q : « f est une fonction croissante ».

Remarques.

1. La table de vérité se lit de la façon suivante : si P est vraie alors $\overline{P}$ est fausse et si P est fausse alors $\overline{P}$ est vraie.
2. Nous retrouvons la notation « barre » que nous avons déjà rencontrée pour désigner l'événement contraire en probabilité ou le complémentaire d'un ensemble. Ce n'est pas un hasard.

Connecteurs logiques et et ou.

Comme en français il est possible d'associer, de combiner, des phrases (propositions) par des connecteurs logiques. Nous nous intéressons aux valeurs logiques de la nouvelle proposition en fonction des propositions associées.

Définition 3. On appelle connecteur de *conjonction* et on note *et* ou $\wedge$ le symbole qui permet à partir des assertions P et Q d'en créer une nouvelle notée $P \wedge Q$ et dont la table de vérité est

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Remarques.

1. Autrement dit l'assertion $P \wedge Q$ est vraie uniquement si P et Q sont simultanément vraies.
2. Rappelons le lien entre le connecteur logique *et* et l'intersection ensembliste.
3. Le connecteur $\wedge$ est commutatif : $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ ont la même table de vérité.

EXERCICE 1. Déterminez les phrases vraies parmi les suivantes.

a) F_1 : « $\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{13}{4}\right) \wedge \left(4^8 \geqslant 4 \times 10^8\right)$ ».

b) F_2 : « $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ et $\dfrac{4+\sqrt{8}}{6} = \frac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{2}$ ».

Définition 4. On appelle connecteur de *disjonction* et on note *ou* ou $\vee$ le symbole qui permet à partir des assertions P et Q d'en créer une nouvelle notée $P \vee Q$ et dont la table de vérité est

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples.

1. La phrase $(3 \in \mathbb{R}_+) \vee (3 \leqslant 2)$ est vraie : P est vraie, Q est fausse donc $P \vee Q$ est vraie.
2. La phrase $(-1 \in \mathbb{R}_+) \vee (1 \leqslant 2)$ est vraie : P est fausse, Q est vraie donc $P \vee Q$ est vraie.
3. La phrase $(3 \in \mathbb{R}_+) \vee (1 \leqslant 2)$ est vraie : P est vraie, Q est vraie donc $P \vee Q$ est vraie.
4. La phrase $(-3 \in \mathbb{R}_+) \vee (3 \leqslant 2)$ est fausse : P est fausse, Q est fausse donc $P \vee Q$ est vraie.

Remarques.

1. Autrement dit l'assertion $P \vee Q$ est vraie uniquement si l'une au moins des deux assertions P et Q est vraie.
2. Que répond une logicienne venant d 'accoucher à qui l'on demande « Avez-vous eu un garçon ou une fille ? » ? Réponse : « Oui. »
3. Rappelons le lien entre le connecteur logique *ou* et l'union ensembliste.
4. Le connecteur $\vee$ est commutatif : $P \vee Q$ et $Q \vee P$ ont la même table de vérité.

5. On parle aussi du « ou inclusif » par opposition au « ou exclusif » que nous verrons plus tard.

Implication.

Définition 5. On appelle connecteur d'*implication*, et on note $\Rightarrow$, le connecteur entre les assertions P et Q défini par la table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemples.

1. Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BA^2 + AC^2 = BC^2$. Cette implication est appelée le théorème de Pythagore.
2.
3. Il suffit qu'un parallélogramme ait un angle droits pour que ce soit un rectangle.
4. Pour qu'un quadrilatère soit un carré il faut que ses diagonales se coupent en leur milieu (mais ça ne suffit pas pour dire que c'est un carré).
5. Il suffit qu'un quadrilatère soit carré pour que ce soit rectangle.

Remarques.

1. Il existe de nombreuses façons d'exprimer l'implication en français et il faut être capable de la reconnaître. « Si P alors Q. » « Si P est vraie alors Q est vraie. » « Si P est vraie, nécessairement Q l'est aussi. » « Il suffit que P soit vraie pour que Q le soit aussi. », « Dès que P alors Q. », « Pour que P soit vraie il faut que Q soit vrai. » (celle-si est oins évidente ; elle vient de la table de vérité et correspond à un procédé de démonstration de l'implication ; pour que l'implication soit vraie il faut vérifier que lorsque P est vraie alors Q l'est aussi les autres cas ne nécessitant pas de démonstration),
2. L'implication n'est pas un connecteur commutatif : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ n'ont pas les mêmes tables de vérité.

EXERCICE 2. En vous appuyant sur la table de vérité de l'implication déterminez si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

Définition 6. Soient P et Q des assertions. La *réciproque* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.

Exemples.

1. L'implication « Si, pour ABC un triangle, $BA^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est rectangle en A. » est la réciproque de l'assertion appelée théorème de Pythagore.

EXERCICE 3. On considère l'implication : « Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ». Donnez la réciproque de cette implication et dites si cette réciproque est vraie.

Équivalence.

Définition 7. On appelle connecteur d'*équivalence*, et on note $\Leftrightarrow$, le connecteur entre les assertions P et Q défini par la table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarques.

1. Autrement dit P et Q sont équivalentes si P et Q ont la même valeur logique : soit toutes deux vraies soit toutes deux fausses.
2. Deux assertions qui ont la même table de valeur sont équivalentes.

Exemples.

1. Les assertions $2 = 3$ et $1 = 7$ sont équivalentes : elles sont toutes deux fausses.
2. Les assertions $x^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$ sont équivalentes : elles sont toutes deux vraies.

Démontrer des équivalences logiques.

Pour démontrer que deux propositions sont équivalentes il faut démontrer qu'elles ont les mêmes tables de vérité.

Exemples.

1. Montrons que les assertions $\overline{P \vee Q}$ et $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ sont équivalentes en établissant les tables de vérités des deux assertions.

   * Rappelons la table de vérité de $P \vee Q$:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   Sa négation (en changeant chaque valeur logique) :

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

   * Déterminons maintenant la table de vérité de $\overline{P} \wedge \overline{Q}$.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

   donc $\left(\overline{P \vee Q}\right) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$.

Proposition 1. Lois de De Morgan : $\left(\overline{P \vee Q}\right) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$, $\left(\overline{P \wedge Q}\right) \Leftrightarrow (P \vee Q)$

Remarques.

1. On reconnaît là encore des résultats concernant les ensembles et déjà rencontrés en probabilité : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposition 2. Deux assertions P et Q sont *équivalentes* si et seulement si $P \Leftrightarrow Q$.

Démonstration.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	F	V			

La négation d'une implication.

Pour montrer qu'une implication est fausse il faut montrer que ça négation est vraie. Déterminons la négation d'une implication.

Proposition 3. $\left(\overline{P \Rightarrow Q}\right) \Leftrightarrow \left(P \wedge \overline{Q}\right)$.

Remarques.

1. Pour qu'une implication soit fausse il faut établir que P peut être vraie sans que Q le soit.

Contraposée.

Définition 8. On appelle *contraposée* d'une implication $P \Rightarrow Q$, l'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Proposition 4. Soient P et Q des assertions. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}\right)$.

Remarques.

1. Ainsi la contraposée n'est pas un nouveau connecteur mais une autre formulation de l'implication. Par conséquent on peut utiliser cette reformulation qu'est la contraposée pour démontrer une implication.

EXERCICE 4. Donnez la contraposée des implications suivantes.

1. Si un quadrilatère est rectangle, alors il a deux côtés perpendiculaires.
2. Si un point I est le milieu de $[AB]$, alors il appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Ou exclusif.

Les autres.

En regardant la table de vérité correspondant à un connecteur entre deux assertions nous voyons que nous pouvons avoir $2^4 = 16$ connecteurs logiques. La moitié d'entre eux correspondent à la négation de l'autre moitié. Combien nous en manque-t-il ? lesquels ?

Tautologie.

Définition 9. Une tautologie est une assertion obtenue en connectant deux assertions P et Q et qui ne peut prendre qu'une valeur à savoir vraie.

EXERCICE 5. Démontrez, avec un table de vérité, que $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ est une tautologie.

Remarques.

1. L'assertion de l'exercice précédent est appelé *syllogisme ou règle d'inférence*. Il s'agit du raisonnement préféré des lycéens : appliquer le résultat général dans un cas particulier.
2. Le paradoxe d'Épiménide (à titre d'anecdote) : Épiménide était un Crétois qui affirmait « Tous les Crétois sont des menteurs ».

Exercices.

EXERCICE 6. Soient P, Q et R des assertions.

1. Démontrez l'associativité de la conjonction : $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.
2. Démontrez que la disjonction est associative.
3. Démontrez que la conjonction est associative vis-à-vis de la disjonction : $[(P \wedge Q) \vee R] \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee R)$.

Les résultats de l'exercice précédente démontrent des propriétés des unions et intersection d'ensembles.

EXERCICE 7. Démontrez que l'implication suivante est fausse : « Si f est une fonction affine alors $f(2) < f(6)$. »

EXERCICE 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que si n^2 est pair alors n est pair.

EXERCICE 9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrez que si $x^3 = 7$ alors $x < 2$.

EXERCICE 10. Soit a et b deux réels. Démontrez la proposition suivante : si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.