

Raisonnement par récurrence.

I Logique : propositions, assertions.

Dans l'axiomatique classique, le raisonnement par récurrence est un théorème de logique. Cependant nous l'accepterons comme un axiome, un principe.

Une *proposition*, en mathématique, peut désigner un résultat toujours vrai (comme un théorème) ou une phrase (assertion) qui peut être soit vraie soit fausse. Dans la suite de ce chapitre nous l'utiliserons pour désigner une assertion.

Exemples.

1. La proposition « le carré de -3 est négatif » est fausse.
2. La proposition $\mathcal{P}$: « $\sqrt{2}$ est irrationnel » est vraie.
3. La négation de la proposition $\mathcal{P}$: « $x \geq 5$ » est $\overline{\mathcal{P}}$: « $x < 5$ ».

Certaines propositions sont des propriétés universelles, c'est-à-dire des propositions qui dépendent d'un élément x appartenant à un ensemble. Ce sont des phrases qui contiennent le plus souvent les expressions « quel que soit » ou « pour tout » ou le quantificateur universel $\forall$.

Pour démontrer qu'une proposition universelle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemples.

1. La proposition $\mathcal{P}(x)$: « $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est vraie quel que soit $x \in]0; 1[$.
2. « Pour tout $x \in]0; 2[$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est fausse puisque, par exemple, pour $x = 1$, on a $\frac{1}{1} = \frac{1}{1^2}$.
3. L'assertion $\mathcal{P}(n)$: « $4^n - 1$ est un multiple de 3. » est vraie pour tout nombre entier naturel n . Cependant la démonstration n'est pour l'instant pas aisée.

Certaines proposition contiennent des implications (appelées aussi conditions nécessaires) le plus souvent sous la forme « si ..., alors ... ».

Exemples.

1. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est impair alors n^2 est impair. » est une assertion qui est vraie. Démontrons-le.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que n est impair et démontrons qu'alors forcément n^2 est aussi impair.

Puisque n est impair il peut s'écrire $n = 2k + 1$ où k est un certain entier.

Donc : $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$. Ainsi n^2 est de la forme $2p + 1$ où p est un nombre entier. Autrement dit n^2 est impair.

Concluons : nous avons démontré que, quel que soit l'entier n , si n est impair, alors, nécessairement, n^2 est aussi impair.

II Le théorème du raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer des propriétés universelles, $\mathcal{P}(n)$, qui dépendent d'entiers naturels n .

La montée de l'échelle. Si j'affirme : « si on met un pied sur un barreau de l'échelle, alors on met, obligatoirement, l'autre pied sur le barreau supérieur » alors, pour peu que l'on mette un pied sur le barreau d'en bas il faudra grimper toute l'échelle.

Théorème 1. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n . Si les deux assertions suivantes sont vraies

- (i) $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- (ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors, forcément, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathcal{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n .

Remarques.

1. L'assertion (i) est appelée *l'initialisation*.
2. L'assertion (ii) est appelée *l'hérédité*.
3. L'initialisation commence avec $n = 0$ mais, comme pour les suites, il est possible de commencer avec un autre rang.
4. Ce théorème, comme le théorème de Pythagore, est une implication. Pour le théorème de Pythagore il faut d'abord vérifier que ABC est rectangle en A pour pouvoir affirmer que l'égalité $BA^2 + AC^2 = BC^2$. De même pour utiliser le raisonnement par récurrence il faut vérifier que l'initialisation et l'hérédité sont vraies avant de pouvoir affirmer que toutes les assertions sont vraies.
5. L'assertion de l'hérédité contient à la fois une propriété universelle et une implication nous adopterons systématiquement la rédaction :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

...

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

6. Lorsqu'on écrit « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie » on signifie que l'on admet que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Le fait que « $\mathcal{P}(n)$ est vraie » est appelée *l'hypothèse de récurrence*.
7. Le raisonnement par récurrence ne permet pas de trouver un nouveau résultat mais il permet de démontrer qu'une conjecture est vraie.

Exemples.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
Démontrons par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
 - * Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{k+1} \leq u_k \leq 3$. Démontrons que $u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 3$.
 $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 2$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement supérieur à 0 donc f est croissante.
De l'hypothèse de récurrence : $u_{k+1} \leq u_k \leq 3$ et de la croissance de f nous déduisons :
 $f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(3)$.
Autrement dit : $u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \frac{11}{4} \leq 3$.
 - * Montrons que : $u_1 \leq u_0 \leq 3$.
 $u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{11}{4}$ donc $u_1 \leq u_0 \leq 3$.
 - * Nous avons démontré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
2. **Démontrer une propriété.**
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $4^n - 1$ est divisible par trois ».
Démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

* Initialisation. Il s'agit de démontrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Autrement dit que $4^0 - 1$ est divisible par 3.

$4^0 - 1 = 0$ et $3 \times 0 = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* Héritéité.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous devons donc démontrer que $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3.

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times (4^n - 1) + 3$$

D'après l'hypothèse de récurrence : $3 \mid 4^n - 1$.

Autrement dit il est possible d'écrire : $4^n - 1 = 3 \times k$ où k est un nombre entier.

Donc

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 3k + 3 \\ &= 3(4k + 1) \end{aligned}$$

Autrement dit $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

3. Démontrer une formule. Ici la somme des entiers naturels jusqu'à n .

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

* $0 = \frac{0 \times 1}{2}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = n + 1 + \sum_{k=0}^n k$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(2+n)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. Démontrer la formule explicite du terme terme général d'une suite.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.

Nous souhaitons démontrer que $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ ».

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

*

5. Démontrer qu'une suite définie par récurrence est croissante.

Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

6. Démontrer un encadrement.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leq u_n \leq 3$.

7. Démontrer une inégalité.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $2n + 1 \leq 2^n$ » est vraie.

8. De la nécessité de l'initialisation.

$\mathcal{P}(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 ».

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 1 = 3k$ donc :

$$\begin{aligned}4^{n+1} - 1 &= 4 \times (4^n + 1) - 4 + 1 \\&= 4 \times 3k - 3 \\&= 3(4k - 1)\end{aligned}$$

Autrement dit $4^{n+1} + 1$ est divisible par 3.

* $4^0 + 1 = 1$ et $3 \nmid 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est fausse.

Nous remarquons que l'hérédité ne suffit pas à démontrer que toutes les propositions sont vraies.

Nous pourrions même démontrer par l'absurde que $4^n + 1$ n'est jamais divisible par 3.

9. Inégalité de Bernoulli.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(n)$: « ♥ pour tout nombre $x \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$. »

* Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

D'une part : $(1+x)^0 = 1$

d'autre part : $1 + 0 \times x = 1$,

donc : $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$.

$\mathcal{B}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{B}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{B}(n+1)$ est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Puisque $(1+x) \geq 0$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx)$$

En développant le membre de droite :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \quad (1)$$

Or, puisque $nx^2 \geq 0$,

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \quad (2)$$

donc, par transitivité entre (1) et (2) :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

Autrement dit $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 1.

- Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $p_0 = 1$ et $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
- Soient f une fonction définie et strictement croissante sur $] -1,5, +\infty[$. On note $\alpha \geq 0,1$ un point fixe de f , autrement dit $f(\alpha) = \alpha$. On pose $u_0 = 0$ et $u_1 = 0,1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$. Démontrez que $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.
- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite définie par : $v_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$. On considère $f : x \mapsto 1,6x - 1,6x^2$. Étudiez la monotonie de f sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis démontrez par récurrence que $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
- Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $p_1 = 1$ $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.
- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et, pour tout nombre entier naturel n , $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$. Démontrez que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
- On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$. Après avoir démontré que $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$ est croissante sur $[\sqrt{11}, +\infty[$, démontrez que $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$ pour tout entier naturel n .
- On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1700$ et $a_{n+1} = 0,75a_n + 300$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$. Montrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{6x+2}{x+5}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Déduisez-en que pour tout entier naturel n , $u_n > 2$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$. Démontrez que $u_n \geq n + 1$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{-u_n-4}{u_n+3}$. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{-x-4}{x+3}$ est strictement croissante sur $] -3, +\infty[$ puis que pour tout entier naturel n , $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right) u_n, \text{ pour tout entier } n \geq 1 \end{cases}$$

Montrez que pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \frac{n}{e^n}$.

- n) On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto 2x(1 - x)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis montrez que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
- o) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.

III Récurrence double.

Théorème 2. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n . Si les deux assertions suivantes sont vraies

- (i) $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,
 - (ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies alors, $\mathcal{P}(n+2)$ est aussi vraie,
- alors les assertions $\mathcal{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n .

Remarques.

1. Ce résultat permet de démontrer des résultats portant sur des suites définies par des récurrences d'ordre deux, c'est-à-dire liant u_n , u_{n+1} et u_{n+2} .
2. Ce résultat est aussi utilisé pour des suites dont les termes d'ordres pairs et impairs sont différents.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$. Conjecturez l'expression de u_n en fonction de n puis démontrez-la.

Exercice 4. travail libre 1 sur la suite de Fibonacci.

Exercice 5. Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{3}$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n}$ est bien définie et périodique.

IV Récurrence forte.

Théorème 3. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n . Si les deux assertions suivantes sont vraies

- (i) $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- (ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vrai alors, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathcal{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n .

Exercice 6. Soit $u : \begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k \end{cases}$. Démontrez que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3n$.

V Exercices.

Exercice 7. Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n .

- a) $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
- b) $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
- c) $n^3 - n$ est divisible par 3.
- d) $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
- e) $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$. Démontrez, pour tout entier naturel n , que : $u_n = 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geq 2 : u_n = 2u_{n-1} - n$. Démontrez, pour tout entier naturel non nul n , que : $u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3u_n + n + 1$. Démontrez, pour tout entier naturel n , que : $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$.

Exercice 11. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = 5u_n - 1$. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n) . Conjecturez son expression explicite. Démontrez la.

Exercice 12. On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante : $0! = 1$ et $(n+1)! = n! \times (n+1)$. Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égale à 1, $n! = 1 \times \dots \times n$.

Exercice 13. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$ est croissante.

Exercice 14. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2020$ est décroissante.

Exercice 15. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1,8$ est bornée par 1 et 2 et décroissante.

Exercice 16. On considère la proposition suivante : $\mathcal{P}(n) : \ll 9 \text{ divise } 10^n + 1 \gg$.

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N} : 9 \text{ divise } 10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est fausse.

Exercice 17. Montrez que : $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{i=0}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ pour tout entier naturel n .

Exercice 18. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. La proposition : « pour tout entier naturel n , $t_n = \frac{n}{n+1}$ » est-elle vraie ou fausse?

Exercice 19. Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I . Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété : $\mathcal{P} : \ll \text{pour tout } x \in I, f(x) \in I \gg$, alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ ».

Exercice 20. Soient $f : I \rightarrow I$ une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrez que, si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 21. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n k$. Considérons la propriété $\mathcal{P}(n) : S_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$. Démontrez que cette propriété est héréditaire mais qu'elle n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_n = \frac{n^3 - n}{3}$.

1. Calculez les cinq premiers termes de la suite.
2. Donnez l'expression de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.

Exercice 23. Bac 2024. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.
2. (a) *Nécessite la fonction logarithme népérien.* Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$.
- (b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
- (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et bornée.

Exercice 24. BAC 2024. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

2. Calculer u_1 et u_2 .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et bornée.

VI Corrections.

Exercice 1.

- a) $u_0 = 1 \geq 0,8$. $f : x \mapsto 0,5x + 0,4$ est une fonction affine croissante donc, si $p_n \geq 0,8$ alors $f(p_n) \geq f(0,8) = 0,5 \times 0,8 + 0,4 = 0,8$.
- b) $2 \times 0,9^0 - 3 = -1 = u_0$. $f : x \mapsto 0,9x - 0,3$. Si $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ alors $f(u_n) = f(2 \times 0,9^n - 3) = 0,9 \times (2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$.
- c) f est croissante donc si $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) = \alpha$.
- d) $13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 3 = u_1$. Notons $f : x \mapsto 0,9x + 1,3$. Si $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$ alors $f(u_n) = f\left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n\right) = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$.
- e) $v_0 = 0,1$ et $v_1 = 0,16 - 0,016 = 0,094$ donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$. $f(x) = 1,6x - 1,6x^2 = -1,6\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1,6}{4} = -1,6\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ alors par croissance de $f : f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$. On peut conclure avec $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,4 \leq \frac{1}{2}$.
- f) $0,75 + 0,25 \times 0,2^{1-1} = 1 = p_1$. $f : x \mapsto 0,2x + 0,6$. Si $p_{n+1} = f(p_n) = f(0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}) = 0,2 \times (0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}) + 0,6$.
- g) $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et $v_1 = 0,995 \times (6 \times 10^{21}) + 1,5 \times 10^{19} = 5,985 \times 10^{21}$ donc $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$. $f : x \mapsto 0,996x + 1,5 \times 10^{19}$ est une fonction affine strictement croissante donc, si $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$, alors $f(0) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$.
- h) $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{18}{5}$ donc $u_0 \geq u_1 \geq \sqrt{11}$ car $3 \leq \sqrt{11} \leq \frac{7}{2}$. $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$ est croissante sur $[\sqrt{11}, +\infty[$ par étude de la dérivée. Si $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$ alors $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}\sqrt{11} = \sqrt{11}$.
- i) $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ donc $1200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1700$. $f : x \mapsto 0,75x + 300$ est une fonction affine strictement croissante donc si $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$ alors $f(1200) \leq f(a_{n+1}) \leq f(a_n) \leq f(1700)$ et on conclue avec $f(1200) = 1200$ et $f(1700) = 1575$.
- j) $u_0 = 8 > 2$. $f : x \mapsto \frac{6x+2}{x+5}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ par étude du signe de la dérivée. Si $u_n > 2$ alors $f(u_n) > f(2) = 2$.

- k) $u_0 = 3 \geq 0 + 1$. Si $u_n \geq n = 1 + 1$ alors $5u_n \geq 5(n+1)$, $5u_n - 4n - 3 \geq 5n + 5 - 4n + 3 = n + 1$.
- l) $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{-0-4}{0+3} = -\frac{4}{3}$ pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{-u_n-4}{u_n+3}$. $f : x \mapsto \frac{-x-4}{x+3}$ est strictement croissante sur $] -3, +\infty[$ par étude du signe de la dérivée. Si $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.
- m) $\frac{1}{e^n} = u_1$ Si $u_n = \frac{n}{e^n}$ alors $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{e^n} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$.
- n) $f : x \mapsto 2x(1-x)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ du fait de la forme canonique du trinôme. $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 0,42$. Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
- o) $u_0 = 0 \geq 2 \times 0$. Si $u_n \geq 2n$ alors $5u_n \geq 10n$ puis $5u_n - 8n + 6 \geq 10n - 8n + 6 \geq 2n + 2$.

Exercice 2. $u_1 = (-2)^1 - 3 \times (-1)^1 = 1$ et $u_2 = (-2)^2 - 3 \times (-1)^2 = 1$.

Supposons $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$ et $u_{n+1} = (-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}$. $u_{n+2} = -3((-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}) - 2((-2)^n - 3 \times (-1)^n) = (-2)^{n+2} - 3 \times (-1)^{n+2}$.

Exercice 3. $u_2 = \frac{5}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 = 4$. La suite semble constante égale à 4. $u_{n+2} = \frac{5}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 = 4$.

Exercice 4. **Des éléments de correction.**

Exercice 5. $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. Si $u_{n-1} > 0$ et $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_{n-1}}{u_n} > 0$. La suite est bien définie.

Exercice 25. $u_1 = 3 \times 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k = 3k$. $u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 3k = \frac{6}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1)$.

Exercice 6.

1.

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2^{n+5} + 3^{3n+5} \\ &= 2 \times 2^{n+4} + 3^{3n+5} \end{aligned}$$

Astuce :

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2 \times 2^{n+4} + 2 \times 3^{3n+2} - 2 \times 3^{3n+2} + 3^{3n+5} \\ &= 2 \left(2^{n+4} 3^{3n+2} \right) - 2 \times 3^{3n+2} + 3^3 \times 3^{3n+2} \\ &= 2 \left(2^{n+4} 3^{3n+2} \right) + (-2 + 3^3) \times 3^{3n+2} \\ &= 2 \left(2^{n+4} 3^{3n+2} \right) + 25 \times 3^{3n+2} \end{aligned}$$

25 est divisible par 5 et, d'après l'hypothèse de récurrence $2^{n+4} 3^{3n+2}$ est divisible par 5 donc $2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2}$ est divisible par 5.

2.

$$\begin{aligned} 3^{6(n+1)+2} - 2 &= 3^6 \times 3^{6n+2} - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 7 \times 208 \end{aligned}$$

3. Version brève : $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs et l'un de ces facteurs est forcément multiple de 3.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 - n) \end{aligned}$$

Or $3(n^2 - n)$ est divisible par 3 et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n^3 - n$ est divisible par 3 donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 3.

4.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 - 3(n+1) &= 4 \times 4^n - 1 - 3(n+1) \\ &= 4 \times (4^n - 1 - 3n) + 4 + 12n - 1 - 3(n+1) \\ &= 4 \times (4^n - 1 - 3n) + 9n \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 7 \times 3^{5(n+1)} + 4 &= 7 \times 3^5 \times 3^{5n} + 4 \\
 &= 3^5 \times (7 \times 3^{5n} + 4) - 3^5 \times 4 + 4 \\
 &= 3^5 \times (7 \times 3^{5n} + 4) - 968 \\
 &= 3^5 \times (7 \times 3^{5n} + 4) - 88 \times 11
 \end{aligned}$$

Exercice 7. Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right),$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5} \left[5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \right] + 3$$

À ce stade nous avons obtenu une formule explicite de u_{n+1} . Mais la présentation n'est pas tout à fait celle désirée. Modifions-la.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 2 - 5 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5} \right)^n + 3 \\
 &= 5 - 5 \times \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \\
 &= 5 \times 1 - 5 \times \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \\
 &= 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

Exercice 8. Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n - (n+1) \quad (1).$$

Cette formule de récurrence a été obtenue en remplaçant n par $n+1$ dans la formule de l'énoncé : pas de difficulté puisque cette formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n,$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 2 \left[(2^{n-1} + 1) + n \right] - (n+1) \\
 &= 2 \times 2 \times 2^{n-1} + 4 + 2n - n - 1 \\
 &= 2 \times 2^n + 2 + n \\
 &= 2(2^n + 1) + n
 \end{aligned}$$

Exercice 9. Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \quad (1).$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$, donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \left[\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2} \right] + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{6}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3n}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-3-3n+2n+2}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-n-1}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 10.

* $u_0 = u_1 = u_2 = \frac{1}{4}$.

* (u_n) semble être constante égale à $\frac{1}{4}$.

* Démonstration par récurrence. $u_{n+1} = 5u_n - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence : $u_{n+1} = 5 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

Exercice 11. $1! = 1$. $(n+1)! = n! \times (n+1) = 1 \times \dots \times n \times (n+1) = 1 \times \dots \times (n+1)$.

Exercice 12. $u_0 = -2 \leq u_1 = \frac{1}{2} \times (-2) + 1 = 0$. Si $u_n \leq u_{n+1}$ alors, $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ étant croissante, $\frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2}u_{n+1} + 1$.

Exercice 13. $u_0 = 2020 \geq \sqrt{45^2} = 2025 \geq \sqrt{2020} = u_1$. Si $u_n \geq u_{n+1}$ alors, $x \mapsto \sqrt{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{u_n} \geq \sqrt{u_{n+1}}$.

Exercice 14. $u_1 = \frac{2}{3-1,8} = \frac{5}{3}$ donc $1 \leq u_1 \leq u_0$. Si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ alors, $x \mapsto \frac{2}{3-x}$ étant croissante sur $] -\infty, 3[$, $\frac{2}{3-1} \leq \frac{2}{3-u_{n+1}} \leq \frac{2}{3-u_n} \leq \frac{2}{3-2}$.

Exercice 15.

- $10^{n+1} + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 9$.
- $10^0 + 1 = 2$, $10^1 + 1 = 11$, $10^2 + 1 = 101$ et $10^3 + 1 = 1001$.
- $10^{n+1} - 1 = 10(10^n - 1) + 10 - 1 = 10(10^n - 1) + 9$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\mathcal{P}(n)$ est faussee.

Supposons que $10^n + 1$ est divisible par 9. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n + 1 = 9k$.

D'autre part, d'après les questions précédentes $10^n - 1$ es divisible par 9 donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n - 1 = 9p$.

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} 10^n + 1 - (10^n - 1) &= 9k - 9p \\ 2 &= 9(k - p) \end{aligned}$$

Donc 2 est divisible par 9 ce qui est absurde car : $0 < 2 < 9$.

Nous avons démontré par l'absurde que 10^+1 n'est pas divisible par 9, et ce, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.

* Quelques éléments pour l'hérédité.

$\mathcal{P}(n+1)$ est une égalité, donc de la forme $A = B$. Pour la démontrer nous transformer l'écriture de A et de B en montrant $A = C$ et $B = C$ pour conclure $A = B$.

$$\begin{aligned} \text{D'une part : } \sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{6(n^2+2n+1) + (n^2+n)(2n+1)}{6} = \frac{6n^2+12n+6+2n^3+n^2+2n^2+n}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}, \end{aligned}$$

$$\text{d'autre part : } \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6},$$

$$\text{donc, par transitivité, } (n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

* Pour démontrer l'hérédité il faut établir une égalité $A = B$. Nous allons partir de B et en développant astucieusement faire apparaître A .

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 = \left[\frac{(n+1)n+(n+1)2}{2} \right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \right]^2.$$

$$\text{En développant avec une identité remarquable : } \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + n(n+1)(n+1) + (n+1)^2.$$

$$\text{D'après l'hypothèse de récurrence : } \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 = n(n+1)^2 + 1 \times (n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^3.$$

$$\text{En factorisant : } \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 = (n+1)(n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^3 = (n+1)^3 + \sum_{i=0}^n i^3 = \sum_{i=0}^{n+1} i^3.$$

Exercice 17. $t_0 = \frac{0}{0+1}$. Si $t_n = \frac{n}{n+1}$ alors $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

Exercice 18. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et donc $f(u_n)$ existe.

Exercice 19. On démontre par récurrence que $u_n \geq u_{n+1}$.

Exercice 20. D'une part $S_n + n + 1 = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + n + 1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{8} + n + 1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + \frac{9}{8} = \frac{1}{2} \left(n^2 + 3n + \frac{9}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 = S_{n+1}$.

$$S_0 \neq \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Exercice 21.

1. $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = 8, u_4 = 20$.
2. $u_{n+1} - u_n = n + 1$.
3. $u_{n+1} - u_n = n + 1 > 0$ donc suite strictement croissante.
4. Voir ci-dessus.

Exercice 22.

1. $2xe^{-x} = x \Leftrightarrow x(2e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln(2)$.
2. (a) $f = uv$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-x}$.
(b) $e^{-x} > 0$ et $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ donc

x	0	1
f'		$\begin{matrix} + \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}$
f	$\begin{matrix} 0 \\ \nearrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} e^{-1} \end{matrix}$

3. (a) $u_1 = 2 \times 0,1e^{-0,1} = \frac{2}{e^{0,1}} \times 0,1 > 1 = u_0$. Si $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ alors $f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0; 1]$ et on conclue avec $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} \leq 1$.
(b) Immédiat.

Exercice 23.

1. $g(x) = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1$ donc g est strictement croissante sur $[0; 1]$. $g(0) = 0$ et de $g(1) = 1$.
2. $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$.
3. $0 < u_0 < u_1 < 1$. Si $0 < u_n < u_{n+1} < 1$, g étant strictement croissante sur $[0; 1]$, alors $f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$.
4. Immédiat.