Orthogonalité de droites et de plans.

Orthogonalité de deux droites.

Définition 1. Deux droites sont dites orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Exemples.

1. Sur le pavé droit $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (BC) sont orthogonales car $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
2. Sur le pavé droit $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (AB) sont orthogonales car $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Elles sont même perpendiculaires puisqu'elles sont sécantes en A.
3. Sur le pavé droit $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (AF) ne sont orthogonales car $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} \neq 0$.

Remarques.

1. Rappelons que des vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
2. Des droites peuvent être orthogonales sans être sécantes. Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires. Dans ce cas on dit qu'elles sont non coplanaires.

Proposition 1.

(i) Deux droites sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

(ii) Deux droites sont orthogonales si et seulement si il existe une troisième droite qui soit parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

(iii) Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

(iv) Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

(v) Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires.

Remarques.

1. Ces résultats n'ont pas besoin d'être appris. Avec un peu de bon sens on peut les retrouver. Nous les utiliserons assez peu et leur préférerons la définition.

EXERCICE 1. Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne $A(1;0;2)$, $B(3,-3,3)$ et $C(-2,2,14)$. Démontrez que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 1. Il faut penser en plus de l'orthogonalité à vérifier l'intersection.

Orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Définition 2. *Une droite est dite orthogonale a un plan* si un vecteur directeur de la droite est orthogonal aux deux vecteurs d'une base du plan.

Remarques.

1. Si nous serons parfois amenés à démontrer une orthogonalité entre un plan et une droite en utilisant cette définition, nous lui préférerons la démonstration utilisant le vecteur normal (confer infra).

EXERCICE 2. Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-11)$, $C(-4,5,-9)$, $D(-8,3,4)$ et $E(-3,10,6)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent bien un plan.

2. Démontrez que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrez que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Proposition 2.

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si tout vecteur directeur de la droite est orthogonal à tout vecteur de la direction du plan.
(ii) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
(iii) Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
(iv) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
(v) Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
(vi) Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles entre eux.

Vecteur normal à un plan.

Définition 3. Nous dirons qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est *normal à un plan* $\mathscr{P}$ s'il existe une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de $\mathscr{P}$ dont les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux à $\vec{n}$.

Remarques.

1. Tout plan admet un vecteur normal. Si c'est intuitif, la justification apparaîtra clairement avec les équations cartésienne du plan. Vous pouvez également consulter la leçon sur le produit vectoriel de l'espace qui permet de construire un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
2. Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de la direction de ce plan.

EXERCICE 3. L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2,-3,5)$, $B(1,0,7)$ et $C(-4,1,3)$.

1. Démontrez que A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

EXERCICE 4. Soit $\mathscr{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\mathscr{P}$). Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$.

Exercice 4. $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Supposons par exemple $x=1$. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ donc $1\times1+1\times y+2\times z=0$ et $-1\times1+2\times y+-3\times z=0$. Donc $\left\{\begin{array}{l}y+z=-1\\2y-3z=1\end{array}\right.$. $z=-\frac{3}{5}$ et $y=-\frac{4}{5}$.

Proposition 3. Étant donné un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A, il existe un unique plan normal à $\vec{n}$ et passant par A.

Remarques.

1. Ainsi pour définir un plan il n'est pas nécessaire de donner un point et une base : il suffit de donner un point et un vecteur normal.
2. Une façon de voir que nous utiliserons plus tard pour l'équation cartésienne : le plan est formée de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Proposition 4.

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.
(ii) Un droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à vecteur normal à ce plan.
(iii) Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

Remarques.

1. La première assertion sera très utilisée. Pour montrer une orthogonalité entre un plan et une droite nous nous contenterons de montrer la colinéarité d'un vecteur directeur et d'un vecteur normal.

Équations cartésiennes d'un plan.

Proposition 5. Si $\mathscr{P}$ est un plan de l'espace alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tel que $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement toute équation de cette forme décrit un plan.

Remarques.

1. L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée *une équation cartésienne* du plan.
2. Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne d'un plan. Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation d'un plan alors $(ma)x + (mb)y + (mc)z + (md) = 0$ en est aussi une. Les coefficients des diverses équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnels les uns aux autres.

Proposition 6. Soi t $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Si $\mathscr{P}$ est le plan correspondant à l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

EXERCICE 5. Vérifiez que $3x - 2y + z = 2$ est une équation cartésienne du plan (ABC) où $A(1;1;1)$, $B(-1;-1;3)$ et $C(2;1;-2)$.

Remarques.

1. Ce résultat est très important dans la pratique : il permet, facilement, de passer d'un point et d'un vecteur normal à une équation cartésienne et réciproquement.

EXERCICE 6. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : $A(4~;~0~;~0)$, $B(0~;~2~;~0)$ et $C(0~;~0~;~2)$.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. Déduisez-en une équation cartésienne de (ABC).

EXERCICE 7. Déterminez un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $2x + y - 3z + 14 = 0$.

Nous appellerons *plan médiateur d'un segment* le (seul) plan orthogonal au segment et contenant son milieu. C'est en somme l'équivalent d'une médiatrice mais dans l'espace

EXERCICE 8. Soit $A(-1,2,5)$ un point de l'espace rapporté à un repère et $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2. Soit $B(3{,}8{,}7)$. Déterminez une équation du plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[AB]$.

EXERCICE 9. Soient $A(1{,}0{,}3)$, $B(2{,}2{,}7)$ et $C(-1{,}5{,}4)$ trois points de l'espace rapporté à un repère et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrez que $\mathscr{P}$ est le plan (ABC).
3. Déduisez-en un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 9.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$.
   $\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 5\end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times (-2) = 9 \neq 0$.
   Donc vecteurs non nuls et non colinéaires A, B et Cdéfinissent bien un plan.
2. $2x_A + y_A - z_A + 1 = 2 \times 1 + 0 - 3 + 1 = 0$ donc $A \in \mathscr{P}$. De même pour B et C.
3. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 10. Dans l'espace rapporté à un repère, notons $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - 7z - 14 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 19 - 5t \end{cases}$

Déterminez l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Orthogonalité de deux plans.

Définition 4. Soient $\mathscr{P}_1$ un plan de l'espace dont $\vec{n}_1$ est un vecteur normal, $\mathscr{P}_2$ un plan de l'espace dont $\vec{n}_2$ est un vecteur normal. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux.

Remarques.

1. Nous aurions pu choisir une définition affine de l'orthogonalité : deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont dits orthogonaux (ou perpendiculaires) si et seulement si l'un contient une droite qui est perpendiculaire à une droite de l'autre. Cependant cette définition met en jeux des existence qui sont difficiles à montrer contrairement à l'orthogonalité.

EXERCICE 11. Démontrez que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x + 3y + z = 0$ et $-x + 2y - 4z = 0$ sont orthogonaux.

EXERCICE 12. On donne les points suivants $A(-2{,}1{,}3)$ et $B(1,-2{,}2)$ et $C(4{,}1,-1)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un seul plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminez une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\mathscr{P}$ passant par le point A.

Exercice 12.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}$.
2. Il faut trouver un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
   $$\begin{cases} 3 - 3y + z = 0 \\ 6 - 4z = 0 \end{cases}$$
   $z = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$.
   $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

Clairement $\vec{m}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{n}$.D'où une équation d'un plan orthogonal : $3x-2y+d=0$ et enfin $d=8$.

Projeté orthogonal d'un point sur un plan.

Définition 5. Soient M un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan. Nous appellerons *projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$*, le point H intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M.

Remarques.

1. Cette définition est aussi une proposition puisqu'elle sous-entend l'existence et l'unicité du projeté orthogonal.

EXERCICE 13. Soit, dans l'espace rapporté à un repère, $\mathscr{P}$ le plan passant par le point $A(1,-2,1)$ et de vecteur normal $\vec{u}(-3,1,4)$. Déterminez les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $B(-15,-10,4)$ sur le plan $\mathscr{D}$.

Distance d'un point à un plan.

Proposition 7. Le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Définition 6. Nous appellerons distance d'un point A à un plan $\mathscr{P}$ la distance de A à sont projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$.

EXERCICE 14. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal on considère les points $A(2,3,3)$, $B(-1,17,-17)$ et un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrez que $H(-9,5,-1)$ appartient à $\mathscr{P}$.
2. Démontrez que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$ et déduisez-en la distance de B à $\mathscr{P}$.
3. Soit $C(5,11,-5)$. Justifiez que C est le projeté orthogonal de H sur (BC) puis calculez la distance de H à (BC).

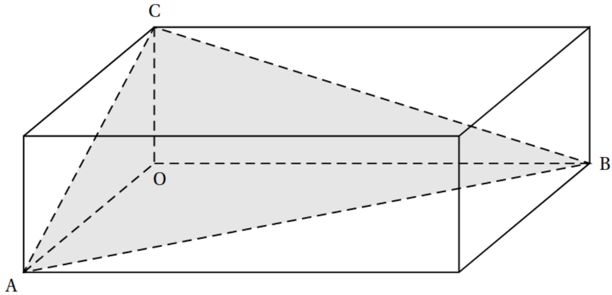
EXERCICE 15. Soient $A(8,10,5)$ un point et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-z+1=0$ dans l'espace muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 16. Soient $A(1;0;-2)$, $B(0;3;-1)$, $C(-1;2;1)$, $D(0;-1;0)$ et $S\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2};4\right)$ des points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Démontrez que $ABCD$ est un rectangle.
2. (a) Montrez que si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) alors, pour tout point M du plan (ABC), on a $SH=\frac{|\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$, où H est le projeté orthogonal de S sur le plan ABC.
   (b) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).
   (c) En déduire la hauteur SH de la pyramide $SABCD$.
3. Calculez le volume de la pyramide $SABCD$.

Exercices.

EXERCICE 17. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A de coordonnées $(2\,;\,0\,;\,0)$, B de coordonnées $(0\,;\,3\,;\,0)$ et C de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

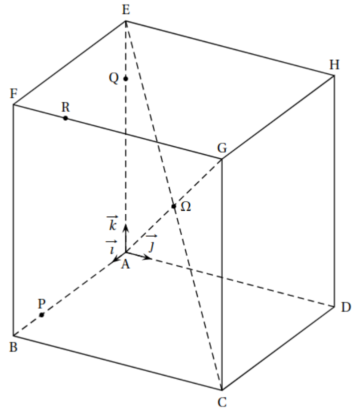
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$.

   (c) Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 18. On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω. Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FR}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{FG}}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\vec{k} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.



Partie I

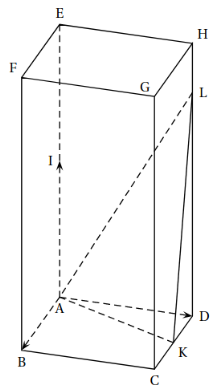
1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;\,2\,;\,8)$. Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;\,4\,;\,4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\dfrac{14}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

EXERCICE 19. On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci- dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$. On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\ ;\ \dfrac{40}{49}\ ;\ \dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times$(aire de la base)$\times$ hauteur.

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 19.

1. $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.
2. (a) $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ forment une base de (AKL). Avec les coordonnées : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 0$. Donc $\vec{n}$ est normal à (AKL).
   (b) $\vec{n}$ est normal à (AKL) donc une équation cartésienne de la forme $6x-3y+2z+d=0$. De $A\in(AKL)$ on déduit $d=0$. $(AKL):\ 6x-3y+2z=0$.
   (c) Δ perpendiculaire à (AKL) et $\vec{n}$ orthogonal à (AKL) donc $\vec{n}$ est vecteur directeur de Δ.

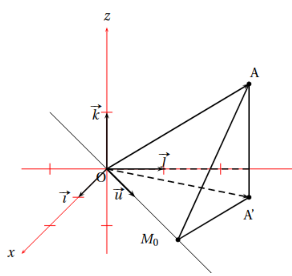
   Δ passe ar D et de vecteur directeur $\vec{n}$ donc $\Delta : \begin{cases} x = 6t \\ y = -3t+1 \\ z = 2t \end{cases}$.
   (d) $N\left(3\times\frac{3}{49}; -3\times\frac{3}{49}+1; 2\times\frac{3}{49}\right)$ donc $N\in\Delta$.
   $6x_N - 3y_N + 2z_N = 0$ donc $N\in(AKL)$.
   Comme $D\in\Delta$, $N\in\Delta\cap(AKL)$ et Δ perpendiculaire à (AKL), N est le projeté orthogonal de D sur (AKL).
3. (a) $\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.
   (b) $d((AKL);D) = DN = \left\|\overrightarrow{DN}\right\| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{DN}} + y^2_{\overrightarrow{DN}} + z^2_{\overrightarrow{DN}}} = \frac{21}{7}$.
   (c) $\mathscr{A} = 3\times\frac{1}{ND}\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.

EXERCICE 20.

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point. On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que : $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.
   (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.