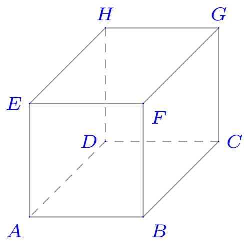
Positions relatives de droites et plans.

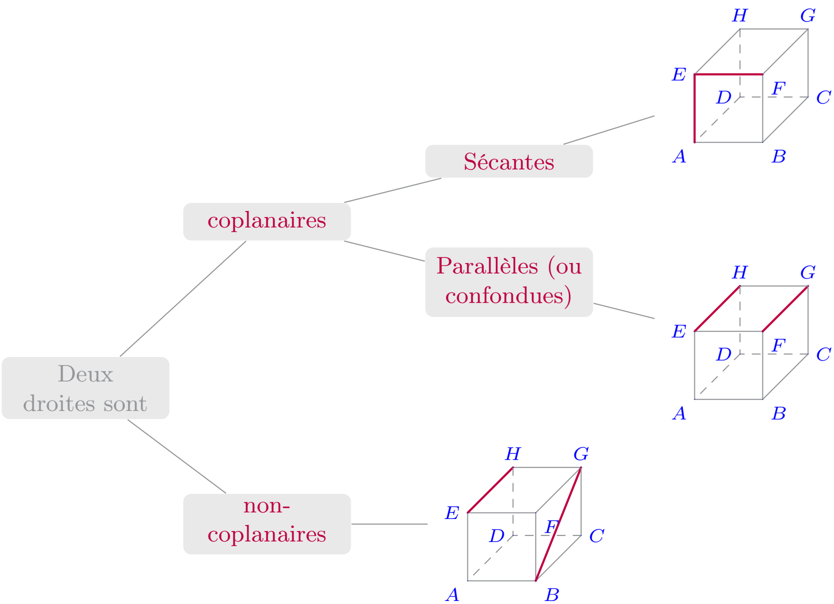
Vocabulaire et lecture graphique.

Nous ne donnerons pas ici de définition de parallèle ou sécant. Nous verrons cela ultérieurement. Nous nous contenons d'un approche intuitive à la Euclide.

Afin d'illustrer la leçon nous choisirons des exemples provenant du cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre en perspective cavalière.

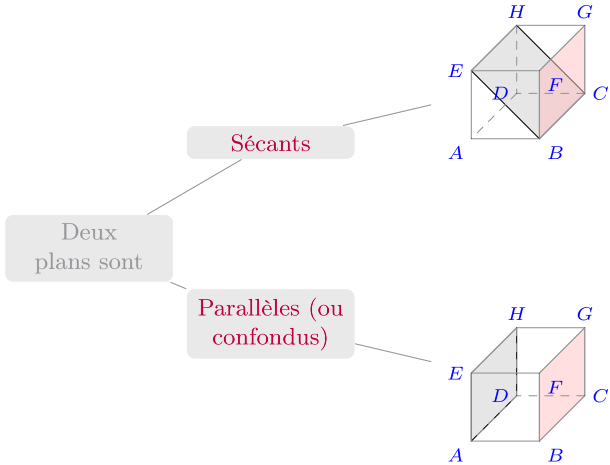


Il faut distinguer deux cas suivant que les droites peuvent être vues comme appartenant à un même plan ou non :



Remarques.

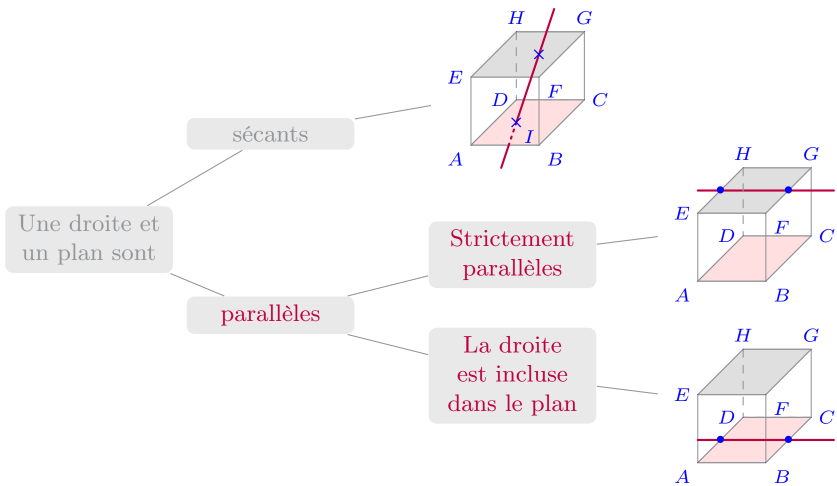
1. L'intersection de deux droites de l'espace est donc vide ou un point ou une droite.



Remarques.

1. L'intersection de deux plans sécants est une droite. Sur la figure : (EBC) et (FBC) se coupent suivant (BC).
2. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un l'est aussi à l'autre.

Étude de la position relative de la droite et du plan (ABC).



Pour certaines questions il peut être utile de savoir (exercices du lycée Valin infra) :

— si deux points sont dans un plan alors la droite reliant ces deux points est incluse dans le plan,

— étant donnés une droite et un point la parallèle à la droite passant par le point est coplanaire à la droite et au point.

EXERCICE 1. Indiquez par lecture la position relative des deux droites proposées.

a) (AD) et (KC).	b) (SI) et (UP).	c) (UI) et (GR).	d) (EM) et (NG).
e) (PG) et (PH).	f) (LB) et (JC).	g) (HS) et (RU).	h) (RS) et (BM).
i) (RM) et (AB).			

Exercice 1.

a) Sécantes.
b) Parallèles.
c) Non coplanaires.
d) Sécantes.
e) Confondues.
f) Sécantes.
g) Non coplanaires.
h) Sécantes.
i) Sécantes.

EXERCICE 2. Indiquez par lecture la position relative de la droite et du plan proposés.

a) (IB) et (AFG).
b) (PF) et (IKL).
c) (BF) et (EHP).
d) (IK) et (ADC).
e) (BU) et (ACG).
f) (AN) et (REJ).
g) (KM) et (BCG).
h) (BE) et (HGS).
i) (FN) et (EHB).

Exercice 2.

a) Sécants.
b) Strictement parallèles.
c) Sécants.
d) (IK) est incluse dans (ADC).
e) Sécants.
f) $(AN) \subset (REJ)$.
g) Strictement parallèles.
h) Sécants.
i) Strictement parallèles.

EXERCICE 3. Indiquez par lecture la position relative des plans proposés.

a) (RMP) et (KTS).
b) (PQM) et (HGF).
c) (IDC) et (RFP).
d) (DUR) et (SKC).
e) (KIM) et (BTS).
f) (NEM) et (RUT).
g) (BMP) et (HEI).
h) (FCR) et (HIM).
i) (HEB) et (JCH).

Exercice 3.

a) Strictement parallèles.
b) Confondus.
c) Sécants.
d) Sécants.
e) Strictement parallèles.
f) Strictement parallèles.
g) Strictement parallèles.
h) Sécants.
i) Confondus.

EXERCICE 4. Déterminez l'intersection des deux plans proposés.

a) (MPQ) et (BDS).
b) (PIN) et (SIN).
c) (QUA) et (KIM).

Exercice 4.

a) $(MPQ) \cap (BDS) = (HF)$.
b) $(PIN) \cap (SIN) = (IN)$.
c) $(QUA) \cap (KIM) = \varnothing$.

EXERCICE 5. Exercices en ligne pour construire et visualiser les intersections dans l'espace : site du lycée Valin ou directement sur Geogebra.

EXERCICE 6.

Droites sécantes.

Nous allons maintenant formaliser ces notions de positions relatives en utilisant les définitions des droites et plans.

Les méthodes conduiront très souvent à résoudre des systèmes linéaires.

Définition 1. Deux droites de l'espace sont dites *sécantes* si leur intersection est réduite à un point.

Exemples.

1. Soient d_1 et d_2 deux droites données par leurs représentations paramétriques : $d_1 : \begin{cases} x = 2t_1 + 1 \\ y = -t_1 + 3 \\ z = t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x = t_2 + 1 \\ y = 3t_2 \\ z = t_2 - 1 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}$.

Pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ on obtient les mêmes coordonnées donc d_1 et d_2 ont un point commun. Reste à vérifier que c'est le seul ; on peut au choix montrer : qu'un autre point de d_1 n'appartient pas à d_2, que des vecteurs directeurs des deux droites ne sont pas colinéaires (et donc les droites ne sont pas parallèles).

Nous aurions pu résoudre directement le système de trois équations à deux inconnues : $\begin{cases} 2t_1 + 1 = t_2 + 1 \\ -t_1 + 3 = 3t_2 \\ t_1 = t_2 - 1 \end{cases}$.

2. Soient d_1 et d_2 deux droites données par leurs représentations paramétriques : d_1 : $\begin{cases} x = t_1 + 1 \\ y = 2t_1 + 1 \\ z = 1 \end{cases}$, $t_1 \in \mathbb{R}$ et d_2 : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = t_2 \end{cases}$, $t_2 \in \mathbb{R}$.
$\begin{cases} t_1 + 1 & = -1 \\ 2t_1 + 1 & = 0 \\ 1 & = t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 & = -2 \\ t_1 & = -1/2 \\ t_2 & = 1 \end{cases}$ il n'y a donc pas de solution au système et par conséquent les droites n'ont pas de point commun (elle peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires).

Remarques.

1. On aurait pu retenir une autre définition : deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont coplanaires et sécantes (au sens usuel du plan) dans ce plan commun. Cependant la définition ici retenue est plus pratique dans les exercices que vous rencontrerez.

EXERCICE 7. Déterminez si les droites suivantes de $\mathscr{E}_3$ rapporté à un repère, sont sécantes.

a) $\Delta_1 : \begin{cases} x & = & t_1 \\ y & = & -2t_1 - 3 \\ z & = & t_1 + 1 \end{cases}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x & = & 2t_2 \\ y & = & 3t_2 - 3 \\ z & = & 4t_2 + 1 \end{cases}$

b) Δ_1 qui passe par $A_1(1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et Δ_2 qui passe par $A_2(-1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Droites parallèles.

Définition 2. Deux droites de l'espace sont dites *parallèles* si au moins un vecteur directeur de l'une est colinéaire à au moins un vecteur directeur de l'autre.

Exemples.

1. On considère $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère orthonormé. Soient d_1 et d_2 deux droites définies par les repères $(A,\vec{u})$ et $(B,\vec{v})$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Comme $\vec{v} = 3\vec{u}$, autrement dit les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et par conséquent d_1 et d_2 sont parallèles.
2. On considère $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère orthonormé. Soient d_1 et d_2 deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Le tableau $\begin{array}{|c|c|c|} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$ n'est pas de proportionnalité donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. Soient d_1 et d_2 deux droites données par leurs représentations paramétriques : d_1 : $\begin{cases} x = 2t_1 \\ y = 2t_1 + 3 \\ z = 4t_1 \end{cases}$, $t_1 \in \mathbb{R}$ et d_2 : $\begin{cases} x = -6t_2 + 1 \\ y = -6t_2 \\ z = -8t_2 - 1 \end{cases}$, $t_2 \in \mathbb{R}$. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-6\\-8\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de d_1 et d_2. Comme de plus $\vec{v} = -2\vec{u}$, $d_1 \parallel d_2$.
4. Soient d_1 et d_2 deux droites données par leurs représentations paramétriques : d_1 : $\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_1 + 1 \\ z = t_1 \end{cases}$, $t_1 \in \mathbb{R}$ et d_2 : $\begin{cases} x = -t_2 + 1 \\ y = 2t_2 \\ z = t_2 - 1 \end{cases}$, $t_2 \in \mathbb{R}$. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de d_1 et d_2. Or $\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{vmatrix} \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent : $d_1 \not\parallel d_2$.

Remarques.

1. Si les deux vecteurs directeurs sont effectivement colinéaires alors tous les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires entre eux. Les deux droites ont la même direction. Nous aurions pu d'ailleurs retenir cette définition : deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction.
2. Le parallélisme inclus le cas des droites confondues. Si les droites sont parallèles sans être confondues on dit qu'elles sont *strictement parallèles*.
3. Nous aurions pu retenir une autre définition : deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont coplanaires et parallèles (au sens de la géométrie du plan) dans ce plan commun. Là encore la définition retenue est celle qui sera d'usage le plus simple dans les exercices.

EXERCICE 8. Déterminez les droites parallèles parmi

$$\Delta_1 : \begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= 2t-3 \\ z &= -t+1 \end{cases}, \Delta_2 : \begin{cases} x &= 2t-17 \\ y &= -5t+7 \\ z &= t+45 \end{cases}, \Delta_3 : \begin{cases} x &= 4t+24 \\ y &= -10t-3 \\ z &= 2t-\pi \end{cases},$$

$$\Delta_4 : \begin{cases} x &= 3t+12 \\ y &= 2t-18 \\ z &= -t+34 \end{cases}, \Delta_5 : \begin{cases} x &= -6t+1 \\ y &= -4t-3 \\ z &= 2t+1 \end{cases}.$$

EXERCICE 9. Soient $\Delta_1 : \begin{cases} x &= 7t-2 \\ y &= -2t+3 \\ z &= t+1 \end{cases}$ une droite et $A(1{,}0{,}1)$ un point. Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ_2 parallèle à Δ_1 et passant par A.

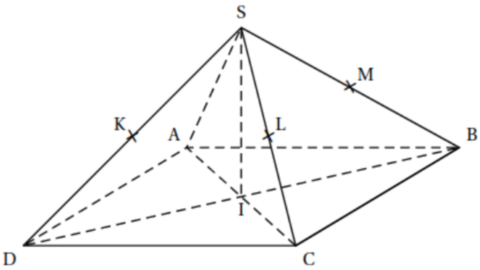
Droites coplanaires.

Définition 3. Deux droites de l'espace sont dites *coplanaires* si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.

Remarques.

1. Si les droites sont sécantes ou parallèles alors il est possible de trouver un plan de l'espace qui les contienne toutes les deux, d'où l'expression coplanaire.
2. Si deux droites ne sont ni sécantes ni parallèles alors elles ne sont pas coplanaires et on dit qu'elles sont *non coplanaires*.

EXERCICE 10.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1. Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants : I$(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$; A$(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$; B$(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$;

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

   a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

   a. $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

   a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

Droites non coplanaires.

Proposition 1. Deux droites sont non coplanaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et si leur intersection est vide.
Démonstration. Il s'agit de la négation de la définition de coplanaire. Le « ou » de la définition devient donc (loi de De Morgan) un « et ».
EXERCICE 11. Soient d et d' deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$d : \left\{\begin{array}{l} -2t+3\\ y=-3t+1\\ z=t+2\end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \left\{\begin{array}{l} t'-1\\ y=-2t'\\ z=4\end{array}\right. ,\ t'\in\mathbb{R}$$

1. Pour chaque droite donnez un point et un vecteur directeur.
2. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? sécantes ?

3. Que pouvez-vous conclure ?

EXERCICE 12. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points A$(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -4+3t \\ y & = & 6-3t \\ z & = & 8-6t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a) $\mathrm{M}_1(-1\ ;\ 3\ ;\ -2)$. b) $\mathrm{M}_2(11\ ;\ -9\ ;\ -22)$.
c) $\mathrm{M}_3(-7\ ;\ 9\ ;\ 2)$. d) $\mathrm{M}_4(-2\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

2. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$. b) $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$. c) $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$. d) $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

3. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a) sécantes. b) strictement parallèles.
c) non coplanaires. d) confondues

EXERCICE 13. Dans chaque cas étudiez la position relative des droites d et d'.

a) $d : \left\{\begin{array}{l} x = -2t+3 \\ y = -3t+1 \\ z = t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \left\{\begin{array}{l} x = t'-1 \\ y = 2t'+2 \\ z = -t'-3 \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

b) $d : \left\{\begin{array}{l} x = t-1 \\ y = 2t+2 \\ z = -t-3 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \left\{\begin{array}{l} x = 3t' \\ y = -2t'+1 \\ z = t'+1 \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

c) $d : \left\{\begin{array}{l} x = 2t+7 \\ y = -3t+1 \\ z = 6t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \left\{\begin{array}{l} x = 3t'-1 \\ y = -\frac{9}{2}t' \\ z = 9t'+5 \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 14. Dans chaque cas déterminez l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x,y,z) vérifiant les conditions données.

a) $\left\{\begin{array}{l} x = 2t-4 \\ y = t+1 \\ z = -3t+4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}_+$. b) $\left\{\begin{array}{l} x = t-3 \\ y = 3t+2 \\ z = t+1 \end{array}\right.$, $t \in [-2;3]$.

EXERCICE 15.

EXERCICE 16. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A$(1\,;0\,;2)$, B$(2\,;1\,;0)$, C$(0\,;1\,;2)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right.$,$t \in \mathbb{R}$.

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

a) $\mathrm{M}(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$; b) $\mathrm{N}(-3\ ;\ -4\ ;\ 6)$;
c) $\mathrm{P}(-3\ ;\ -4\ ;\ 2)$; d) $\mathrm{Q}(-5\ ;\ -5\ ;\ 1)$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

a) $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}$; b) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}$; d) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}$.

4. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

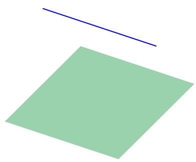
a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

c) D a pour coordonnées $(3\ ;\ -1\ ;\ -1)$; d) les points A, B, C et D sont alignés.

Position relative d'une droite et d'un plan.

Rappelons que nous aurons trois situations possibles :

— la droite est parallèle au plan



— la droite est incluse dans le plan,

— la droite et le plan sont sécants.

Hormis pour l'inclusion qui est déjà définie (il s'agit de l'inclusion d'ensembles : tout point de la droite appartient au plan) nous allons définir ces situations.

Définition 4. *Une droite et un plan de l'espace sont sécants* si et seulement si leur intersection est réduite à un point.

Exemples.

1.

Remarques.

1. Nous aurions pu choisir une définition utilisant les vecteurs mais nous avons fait le choix de ce qui est le plus pratique pour les exercices que nous rencontrerons. Donnons néanmoins une possible définition avec des vecteurs : la droite de repère $(A;\vec{u})$ et le plan de repère $(B;\vec{v},\vec{w})$ sont sécants si et seulement si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace.

Définition 5. Nous dirons qu'*une droite et un plan de l'espace sont parallèles* si et seulement si ils ne sont pas sécants.

Remarques.

1. Une droite et un plan de l'espace sont parallèles si au moins un vecteur directeur de la droite est colinéaire à au moins un vecteur de la direction du plan.Autrement dit il faut et il suffit qu'un vecteur directeur (de la droite) soit une combinaison linéaire des vecteurs d'une base du plan.

2. Pour le dire autrement si $(A;\vec{u})$ est le repère d'une droite et $(B;\vec{v},\vec{w})$ celui d'un plan ils sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas linéairement indépendants. Ou encore si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exemples.

1.

EXERCICE 17. Soit d la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 4t-3 \\ z = \frac{1}{2}t+6 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donnez un vecteur directeur de d.
2. Soit $\mathscr{P}$ un plan dont un repère est $(A;\vec{u},\vec{v})$ avec $A(-1,2,5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}$.
   (a) Le point $E(1,1,1)$ appartient-il à ce plan ?
   (b) La droite d est-elle parallèle à $\mathscr{P}$? Justifier.
   (c) Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ contenant E, de vecteur directeur $\vec{u}$. Que peut-on dire de Δ et de $\mathscr{P}$?

EXERCICE 18.
EXERCICE 19.

Plans parallèles.

Définition 6. Nous dirons que deux plans de l'espace sont *parallèles* si et seulement si toute base de l'un est une base de l'autre.

Remarques.

1. Il faut montrer que chaque vecteur d'une base peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'autre plan.
2. Pour démontrer que des plans sont strictement parallèles il faut démontrer que leur intersection est vide.

EXERCICE 20.

Plans sécants.

Définition 7. Deux plans sont sécants si et seulement si ils ne sont pas parallèles.

Remarques.

1. Il existe un vecteur de l'un qui forme avec une base de l'autre des vecteurs linéairement indépendants.
2.

Exercices.

EXERCICE 21. Soit $ABCD$ un tétraèdre. L'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$. On appelle I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$. Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Déterminez les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrez que (EF) est parallèle à (IJ).

EXERCICE 22.

1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1, -1,3)$ et $B(3,2,4)$.
2. On considère le point $E(-5,7,1)$. Déterminez une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB).
3. On considère le point $F(-1,13,3)$.
   (a) Justifiez que (AF) et d ne sont pas parallèles.
   (b) Déterminez les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.