Produit vectoriel.

En 1839 dans un ouvrage sur la théorie des marées, Hermann Günther Grassmann développe la notion de produit géométrique de deux vecteurs qu'il présente comme une aire dirigée, constituée par l'aire d'un parallélogramme construit sur les deux vecteurs et par un vecteur perpendiculaire au plan de ce parallélogramme. Il établit la propriété d'antisymétrie de ce produit ainsi que sa distributivité par rapport à l'addition. Représenté aujourd'hui par un vecteur et non par une aire dirigée, le produit vectoriel est directement issu du produit géométrique de Grassman.

Orientation de l'espace.

Définition du produit vectoriel.

La construction se fait en quittant le vectoriel et en revenant à l'affine.

Exemples.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires. On note θ la mesure de l'angle non orienté formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soient A un point de l'espace, B , C et E des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v}$. L'aire du parallélogramme $ABEC$ est : $a = AB \times AC \times \sin(\theta)$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (ABC) passant par A . Il existe deux points de $\mathcal{D}$ dont la distance à A est a mais un seul de ces points, que nous notons P fait de $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ une base directe de l'espace.

le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AP}$ ne dépend pas du choix de A mais seulement de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Sa direction est orthogonale celle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, son sens est celui qui rend $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ directe, sa norme est $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$.

Définition 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{0}$;
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors notons A , B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un unique point de la droite orthogonale au plan (ABC) et passant par A tel que $AP = AB \times AC \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ et $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base directe. On a alors $\vec{w} = \overrightarrow{AP}$.

Remarques.

1. Par construction $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.
2. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.
3. $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base directe de l'espace.

Propriétés du produit vectoriel.

Proposition 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Proposition 2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Remarques.

1. Cette propriété est appelée *antisymétrie*. Le produit vectoriel n'est donc pas commutatif.

Proposition 3. Pour toute base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$,

EXERCICE 1. On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ et on considère un triangle ABC dans les différents cas suivants.

- $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ rad,
- ABC est équilatéral et $AB = a$,
- ABC est rectangle en A , $AB = 3$ et $AC = 4$,
- $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{7}$.

Déterminez dans chaque cas le point P tel que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$.

EXERCICE 2. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$. Exprimez simplement $\vec{i} \wedge \vec{j}$ lorsque $\mathcal{B}$ est indirecte. Déduisez-en un moyen de reconnaître qu'une base est directe ou indirecte.

EXERCICE 3. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux. On pose $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$. Démontrez que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$.

EXERCICE 4. Soient A , B et C trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$. Déterminez, dans chaque cas, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

EXERCICE 5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls formant un angle de θ rad. Démontrez que : $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$.

EXERCICE 6. On considère dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ un triangle ABC rectangle en A . Démontrez que : $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AC} = -AC^2 \overrightarrow{AB}$.

Proposition 4. Soient $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs de l'espace, a et b des réels.

- $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2$.
- $\vec{u} \wedge (b\vec{v}) = b(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}$.
- $(a\vec{u}) \wedge \vec{v} = a(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Remarques.

- On peut résumer ces propriétés : $(a\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge (b\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = ab(\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1) + a(\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2) + b(\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_1) + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2$. L'application produit vectoriel, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$, est linéaire par rapport au premier vecteur et par rapport au second ; on dit que le produit vectoriel est *bilinéaire*.

EXERCICE 7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace euclidien démontrez que : $(-\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (-\vec{v}) = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

EXERCICE 8. Soient trois vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{v}$ de l'espace euclidien $\vec{\mathcal{E}}$. Démontrez que : $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) - (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$.

EXERCICE 9. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et soit $\vec{p}$ le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

- Exprimez en fonction de $\vec{p}$ les produits vectoriels : $\vec{u} \wedge (\vec{u} + \vec{v})$, $\vec{u} \wedge (\vec{u} - \vec{v})$, $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \wedge (-4\vec{u} + 5\vec{v})$.
- Soient a , b , a' et b' des réels donnés. On pose : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $\vec{w}' = a'\vec{u} + b'\vec{v}$. Exprimez, en fonction de a , b , a' , b' et $\vec{p}$, le produit vectoriel $\vec{w} \wedge \vec{w}'$. Déduisez-en que $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont colinéaires si et seulement si $ab' - ba' = 0$.

EXERCICE 10. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$. On désigne par φ l'application de $\vec{\mathcal{E}}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$ qui, à tout vecteur $\vec{v}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

- Démontrez que l'application φ est linéaire.

2. Déterminez l'ensemble, $\mathcal{N}$, des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\varphi(\vec{v}) = \vec{0}$.
3. Soit $\vec{v}_0$ un vecteur de $\mathcal{E}$. Déterminez l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$ tels que : $\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}_0)$.

EXERCICE 11. On donne dans l'espace $\mathcal{E}$ deux points distincts A et B . Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$;

b) $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = \vec{0}$.

EXERCICE 12. On considère dans l'espace $\mathcal{E}$ un triangle ABC et on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Démontrez que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$. Déduisez-en les formules : $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$.