Produit scalaire et équation cartésienne.

I Produit scalaire dans le plan (rappel).

1 Le produit scalaire à partir de la projection orthogonale.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{P}$ un plan euclidien,

. A, B et C trois points du plan $\mathscr{P}$,

. H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Nous appellerons *produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$* le nombre réel noté $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ défini par

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AH\times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de même sens,} \\ -AH\times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de sens opposé.} \end{cases}$$

Proposition 1 - Produit scalaire et norme.

Si A et B sont des points du plan affine euclidien, alors $||\overrightarrow{AB}||^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$.

2 Caractérisation du produit scalaire avec le cosinus et la norme.

Proposition 2 - Caractérisation du produit scalaire avec normes et angles.

Soient A, B, et C des points du plan.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||\times\cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

3 Orthogonalité.

Définition 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Proposition 3 - Orthogonalité et perpendicularité dans le plan.

Si A, B, E et F sont des points distincts deux à deux du plan alors : $(AB) \perp (EF)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EF}$

4 Des propriétés algébriques du produit scalaire.

Proposition 4 - Propriétés algébriques du produit scalaire.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs, λ un nombre réel.

(i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

(ii) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.

(iii) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.

(iv) $\lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v})$.

5 Caractérisation du produit scalaire avec des coordonnées.

Proposition 5

Soient :

. $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$,

. $\overrightarrow{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

Corollaire 1

Soient :
. $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,
. $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$,
. $\overrightarrow{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Corollaire 2

Soient :
. $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,
. $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x^2 + y^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$.

6 Caractérisation du produit scalaire par la norme.

Corollaire 3 - identités remarquables.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.
(ii) $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.
(iii) $\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) \cdot \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2$.

Corollaire 4 - Identités de polarisation.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$.
(ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2\right)$.
(iii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||\right)$.

II Vecteur normal à une droite du plan.

Définition 3

Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{n}$ un vecteur du plan.

Nous dirons que $\vec{n}$ est *un vecteur normal à $\mathscr{D}$* si et seulement si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et qu'il existe un vecteur directeur, $\vec{u}$, de $\mathscr{D}$ tel que $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Proposition 6 - Une caractérisation.

Soient $\mathscr{D}$ une droite, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Nous dirons que $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$ si et seulement si est orthogonal à tout vecteur directeur $\mathscr{D}$.

Proposition 7 - Caractérisation d'une droite par point et vecteur normal.

Soient :

. $\mathscr{D}$ une droite du plan,

. $A \in \mathscr{D}$,

. M un point du plan.

. $\vec{n}$ une vecteur non nul.

$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Proposition 8 - Vecteur normal à une droite remarquable.

Soient :

. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $\mathscr{D}$ une droite du plan,

. a et b des réels a et b n'étant pas simultanément nuls,

. $\vec{n}$ une vecteur non nul.

Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{D}$ admet $ax + by + c = 0$ pour équation cartésienne si et seulement si $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.

III Distance d'un point à une droite dans le plan.

Proposition 9 - Distance d'un point à une droite dans un repère orthonormé.

Soient :

. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. A un point du plan de coordonnées (x_A,y_A),

. $\mathscr{D}$ une droite du plan dont une équation cartésienne est $ax+by+c=0$ (a et b non tous deux nuls).

La distance de A à $\mathscr{D}$ est

$$d\left(A,\mathscr{D}\right)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

IV Produit scalaire dans l'espace.

1 Définition, généralisation, caractérisation.

Proposition 10 - caractérisation du produit scalaire par norme et angle.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).$$

2 Orthogonalité.

Définition 4

Soient :

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

3 Base orthonormée, repère orthonormé.

Définition 5

(i) On appelle *base orthonormale de l'espace* tout triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de trois vecteurs de l'espace tel que $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{0}$ et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}||$.

(ii) On appelle *repère orthonormal de l'espace* tout quadruplet $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormale.

4 Coordonnées

Proposition 11 - Caractérisation du produit scalaire avec des coordonnées.

Soient :

. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace,

. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Proposition 12 - Caractérisation de la norme par les coordonnées.

Soient :

. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace,

. $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Corollaire 5 - Distance euclidienne dans l'espace.

Soient :
. $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace,
. $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

5 Propriétés.

Proposition 13 - Forme bilinéaire symétrique.

Soient :
. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace,
. α et β des réels.

(i) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (commutativité ou symétrie).
(ii) $\vec{u}\cdot\left(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}\right) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v} + \beta\vec{u}\cdot\vec{w}$ (bilinéarité).

6 Identités de polarisation.

Corollaire 6 - identités remarquables.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
(ii) $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
(iii) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{u}||^2$.

Proposition 14 - Caractérisation du produit scalaire par les identités de polarisation.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

(ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$.

(iii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|\right)$.

V Orthogonalité dans l'espace affine.

1 Orthogonalité de deux droites.

Définition 6

Deux droites sont dites orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Proposition 15

Deux droites sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

Proposition 16 - Propriétés affines de l'orthogonalités des droites dans l'espace.

(i) Deux droites sont orthogonales si et seulement si il existe une troisième droite qui soit parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

(ii) Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

(iii) Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

(iv) Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires.

2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Définition 7

Une droite est dite orthogonale a un plan si un vecteur directeur de la droite est orthogonal aux deux vecteurs d'une base du plan.

Proposition 17

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si tout vecteur directeur de la droite est orthogonal à tout vecteur de la direction du plan

Proposition 18 - Propriétés affines de l'orthogonalité entre droite et plan.

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

(ii) Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

(iii) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

(iv) Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

(v) Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles entre eux.

3 Vecteur normal à un plan.

Définition 8

Nous dirons qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est *normal à un plan* $\mathscr{P}$ s'il existe une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de $\mathscr{P}$ dont les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux à $\vec{n}$.

Proposition 19

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de la direction de ce plan.

Proposition 20

Étant donné un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A, il existe un unique plan normal à $\vec{n}$ et passant par A.

Proposition 21

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

(ii) Un droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à vecteur normal à ce plan.

(iii) Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

4 Équations cartésiennes d'un plan.

Proposition 22 - Équations cartésiennes d'un plan.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace

$\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels qu'il existe des réels a, b, c et d (avec a, b et c non tous nuls) pour lesquels $ax + by + cz + d = 0$.

Corollaire 7

Soient :

. a, b, c et d des réels a, b et c étant non tous nuls.

Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

5 Système d'équations cartésiennes d'une droite. ☣

Proposition 23

Si les triplets (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2) ne sont pas proportionnels alors le système

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array}\right.$$

caractérise une droite et il est appelé *système d'équations cartésiennes de cette droite*.

6 Orthogonalité de deux plans.

Définition 9

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont dits *orthogonaux* (ou perpendiculaires) si et seulement si l'un contient une droite qui est perpendiculaire à une droite de l'autre.

Proposition 24

Soient :

. $\mathscr{P}_1$ un plan de l'espace dont $\overrightarrow{n}_1$ est un vecteur normal,

. $\mathscr{P}_2$ un plan de l'espace dont $\overrightarrow{n}_2$ est un vecteur normal.

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ sont orthogonaux.

VI Point et droite.

1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Définition 10

Soient :

. M un point de l'espace,

. $\mathscr{D}$ un plan de l'espace.

Nous appellerons *projeté orthogonal* de M sur $\mathscr{D}$, le point H intersection de $\mathscr{D}$ et du plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par M.

2 Distance d'un point à une droite.

Proposition 25

Le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathscr{D}$ est le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M.

VII Point et plan.

1 Projeté orthogonal d'un point sur un plan.

Définition 11

Soients :

. M un point de l'espace,

. $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.

Nous appellerons projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$, le point H intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M.

2 Distance d'un point à un plan.

Proposition 26

Le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

VIII Exercices.