

Produit scalaire et équation cartésienne.

I Produit scalaire dans le plan (rappel).

- 1 Le produit scalaire à partir de la projection orthogonale.
- 2 Caractérisation du produit scalaire avec le cosinus et la norme.
- 3 Orthogonalité.
- 4 Des propriétés algébriques du produit scalaire.
- 5 Caractérisation du produit scalaire avec des coordonnées.
- 6 Caractérisation du produit scalaire par la norme.

II Vecteur normal à une droite du plan.

III Distance d'un point à une droite dans le plan.

IV Produit scalaire dans l'espace.

1 Définition, généralisation, caractérisation.

Exercice 1. ☼

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur a calculez les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{EB}$.

2 Orthogonalité.

3 Base orthonormée, repère orthonormé.

4 Coordonnées

Exercice 2. ☼

Dans un repère orthonormal de l'espace démontrez que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exercice 3. ☼

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1,7, -2)$, $B(4,6, -5)$ et $C(3,1,2)$.

1. Justifiez que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux.
2. Qu'en déduisez-vous pour le triangle ABC .

Exercice 4. 🐛

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère les points $A(4, -2, 0)$, $B(6, 4, -2)$ et $C(12, 6, 0)$. Quelle la nature du triangle ABC ?

Exercice 5. 🐛

Le plan étant rapporté à une repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $A(3, 2, 1)$, $B(-2, 1, 5)$ et $C(1, 0, 1)$. Déterminez une valeur approchée au degré près de \widehat{ABC} .

5 Propriétés.

6 Identités de polarisation.

V Orthogonalité dans l'espace affine.

1 Orthogonalité de deux droites.

Exercice 6. 🐛

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(1; 0; 2)$, $B(3, -3, 3)$ et $C(-2, 2, 14)$. Démontrez que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Exercice 7. 🐛

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -11)$, $C(-4, 5, -9)$, $D(-8, 3, 4)$ et $E(-3, 10, 6)$.

1. Démontrez que les points A , B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrez que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC) .

3 Vecteur normal à un plan.

Exercice 8. 🐛

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2, -3, 5)$, $B(1, 0, 7)$ et $C(-4, 1, 3)$.

1. Démontrez que A , B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

Exercice 9. ♣

Soit \mathcal{P} un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (autrement dit \vec{u} et \vec{v} forment une base de \mathcal{P}). Déterminez les coordonnées d'un vecteur \vec{n} normal à \mathcal{P} .

4 Équations cartésiennes d'un plan.

Exercice 10. ♣

Vérifiez que $3x - 2y + z = 2$ est une équation cartésienne du plan (ABC) où $A(1; 1; 1)$, $B(-1; -1; 3)$ et $C(2; 1; -2)$.

Exercice 11. ♣

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(4; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 2)$.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .
2. Déduisez-en une équation cartésienne de (ABC) .

Exercice 12. ♣

Déterminez un vecteur normal au plan \mathcal{P} dont une équation cartésienne est $2x + y - 3z + 14 = 0$.

Exercice 13. ♣

Soit $A(-1, 2, 5)$ un point de l'espace rapporté à un repère et $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminez une équation du plan \mathcal{P} passant par A et de vecteur normal \vec{n} .
2. Soit $B(3, 8, 7)$. Déterminez une équation du plan médiateur \mathcal{P}' du segment $[AB]$.

Exercice 14. ♣

Soient $A(1, 0, 3)$, $B(2, 2, 7)$ et $C(-1, 5, 4)$ trois points de l'espace rapporté à un repère et \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$.

1. Démontrez que les points A , B et C définissent un plan.
2. Démontrez que \mathcal{P} est le plan (ABC) .
3. Déduisez-en un vecteur normal au plan (ABC) .

Exercice 15. ☹

Dans l'espace rapporté à un repère, notons \mathcal{P} le plan d'équation $2x + 3y - 7z - 14 = 0$ et \mathcal{D} la droite dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \\ z = 19 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
 Déterminez l'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite \mathcal{D} .

5 Système d'équations cartésiennes d'une droite. ☹

Exercice 16. ☹

Dans un repère orthonormé on considère $A(3; -3; 1)$, $B(2; -1; 2)$ et $C(-1; 1; -1)$.

1. Déterminez une équation du plan \mathcal{P} passant par C et de vecteur normal \overrightarrow{AB} .
2. Déterminez une équation du plan \mathcal{Q} médiateur de $[AC]$.
3. Donnez une représentation paramétrique de l'intersection entre \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

Vous pourrez poser $z = t$ dans les deux équations précédentes.

6 Orthogonalité de deux plans.

Exercice 17. ☹

Démontrez que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 d'équations respectives $2x + 3y + z = 0$ et $-x + 2y - 4z = 0$ sont orthogonaux.

Exercice 18. ☹

On donne les points suivants $A(-2, 1, 3)$ et $B(1, -2, 2)$ et $C(4, 1, -1)$.

1. Démontrez que les points A , B et C définissent un seul plan \mathcal{P} .
2. Déterminez une équation cartésienne du plan \mathcal{P}' orthogonal à \mathcal{P} passant par le point A .

VI Point et droite.

1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Exercice 19. ☹

Soit \mathcal{D} la droite passant par le point $A(1; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminez les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point $B(-15; -10; 4)$ sur la droite \mathcal{D} .

2 Distance d'un point à une droite.

Exercice 20. ✎

Soit \mathcal{D} la droite dont une représentation paramétrique est

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Montrez qu'il existe un unique point H de \mathcal{D} tel que la distance entre l'origine du repère O et H est minimale. Montrez que (OH) et \mathcal{D} sont perpendiculaires.

VII Point et plan.

1 Projeté orthogonal d'un point sur un plan.

Exercice 21. 🗎

Soit, dans l'espace rapporté à un repère, \mathcal{P} le plan passant par le point $A(1, -2, 1)$ et de vecteur normal $\vec{u}(-3, 1, 4)$.

Déterminez les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point $B(-15, -10, 4)$ sur le plan \mathcal{P} .

2 Distance d'un point à un plan.

Exercice 22. 🗎

Dans l'espace rapporté à un orthonormal on considère les points $A(2, 3, 3)$, $B(-1, 17, -17)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. On note \mathcal{P} le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

1. Démontrez que $H(-9, 5, -1)$ appartient à \mathcal{P} .
2. Démontrez que H est le projeté orthogonal de B sur \mathcal{P} et déduisez-en la distance de B à \mathcal{P} .
3. Soit $C(5, 11, -5)$. Justifiez que C est le projeté orthogonal de H sur (BC) puis calculez la distance de H à (BC) .

Exercice 23. 🗎

Soient $A(8, 10, 5)$ un point et \mathcal{P} le plan d'équation $2x + 3y - z + 1 = 0$ dans l'espace muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan \mathcal{P} .

Exercice 24. ♣

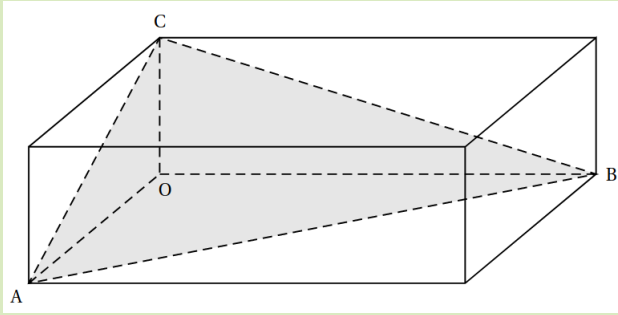
Soient $A(1; 0; -2)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(0; -1; 0)$ et $S\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 4\right)$ des points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Démontrez que $ABCD$ est un rectangle.
2. (a) Montrez que si \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) alors, pour tout point M du plan (ABC) , on a $SH = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$, où H est le projeté orthogonal de S sur le plan ABC .
 - (b) Déterminez les coordonnées d'un vecteur \vec{n} normal au plan (ABC) .
 - (c) En déduire la hauteur SH de la pyramide $SABCD$.
3. Calculez le volume de la pyramide $SABCD$.

VIII Exercices.

Exercice 25. 🍷

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées $(2; 0; 0)$, B de coordonnées $(0; 3; 0)$ et C de coordonnées $(0; 0; 1)$.

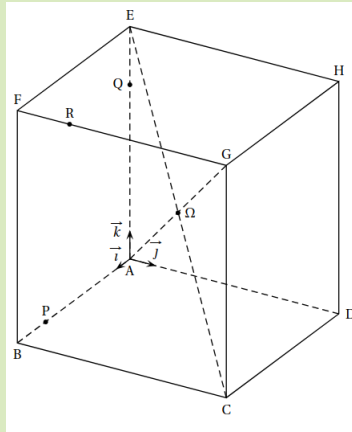


L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
 (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.
2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).
 (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
 (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49}\right)$.
 (c) Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base. En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 26. ✎

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω . Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. On se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec : $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8 ; 2 ; 8)$.
Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1 ; -5 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

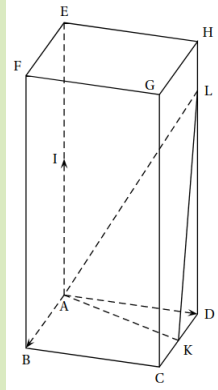
On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4 ; 4 ; 4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω .
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Exercice 27. ♣

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-dessous.

Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\vec{DL} = \frac{3}{2}\vec{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AI})$.

On admet que le point L a pour coordonnées $(0 ; 1 ; \frac{3}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{AK} et \vec{AL} .
2. (a) Démontrer que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(6 ; -3 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
 (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
 (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
 (d) En déduire que le point N de coordonnées $(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} ; \frac{6}{49})$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume \mathcal{V} d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
 (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
 (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

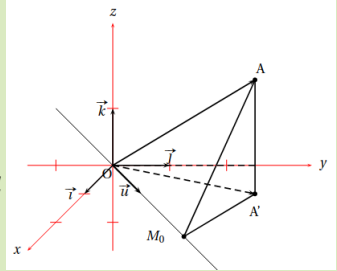
Exercice 28. ♣

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère

- le point A de coordonnées $(1; 3; 2)$,
- le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur \vec{u} .

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d , le point M ayant pour coordonnées $(t; t; 0)$.
 - (a) On note AM la distance entre les points A et M . Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

- (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2; 2; 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1; 3; 0)$.
Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.