# Produit scalaire et équation cartésienne.

## I Produit scalaire dans le plan (rappel).

Il existe différentes définitions possibles pour le produit scalaire du plan euclidien classique, ce qu'en mathématique nous appelons des caractérisations.

Chacune à son intérêt. Rappelons en quelques unes.

### 1 Le produit scalaire à partir de la projection orthogonale.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{P}$ un plan euclidien,

. $A$, $B$ et $C$ trois points du plan $\mathscr{P}$,

. $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$.

Nous appellerons *produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$* le nombre réel noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ défini par

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AH \times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de même sens,} \\ -AH \times AB & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont de sens opposé.} \end{cases}$$

Remarques.

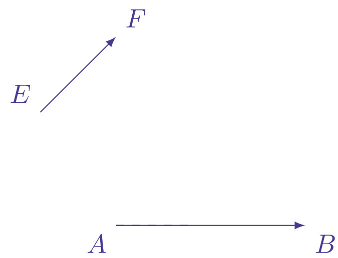
1. Dans le cas de trois points alignés on obtient, en valeur absolue, le produit des deux longueurs. Une autre façon de le dire : lorsque deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $AC$ de vecteurs sont colinéaires alors il existe $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \varepsilon$.
2. Typiquement nous avons deux situations possibles :


$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens

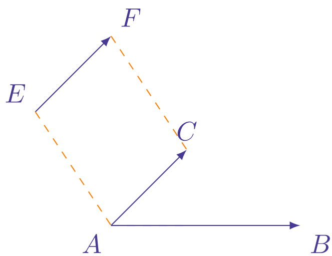
$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens opposé

3. Le résultat d'un produit scalaire est donc un nombre qui peut être positif (premier cas ci-dessus) ou négatif (second cas ci-dessus).

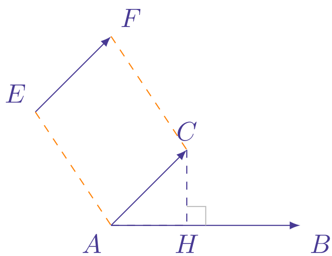
4. Cette définition se généralise à des vecteurs n'ayant pas la même origine comme l'illustre les figures ci-dessous pour $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$ :




On dessine le représentant de $\overrightarrow{EF}$ d'origine $A$ :




Puis on projette orthogonalement sur $(AB)$ :




Finalement $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = AH \times AB$.

5. Pour le produit scalaire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB}$ nous pourrions considérer directement les projetés orthogonaux $E'$ et $F'$ de $E$ et $F$ sur $(AB)$ : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{E'F'}$.
6. Allons encore plus loin dans la généralisation : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de la direction du plan $\mathscr{P}$, alors il existe des points $A$, $B$ et $C$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On définit alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
7. Remarquons, en prévision de la généralisation à l'espace, que si les points $A$, $B$ et $C$ sont distincts deux à deux et non alignés alors $\mathscr{P} = (ABC)$.

Nous avons, au lycée, donné deux définitions de la norme d'un vecteur. La première consista à définir la norme du représentant $\overrightarrow{AB}$ comme la longueur $AB$. La seconde, qui nécessite qu'on ait muni le plan d'un repère, à chaque $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe sa norme comme étant $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ces deux définitions coïncident lorsque la base choisie est orthonormée.

C'est pourquoi nous nous placerons en général dans un repère orthonormé.

Proposition 1 - Produit scalaire et norme.

Si $A$ et $B$ sont des points du plan affine euclidien, alors $||\overrightarrow{AB}||^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Nous aurons un résultat semblable pour la définition du produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs.
2. Nous noterons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$.

## 2 Caractérisation du produit scalaire avec le cosinus et la norme.

Proposition 2 - Caractérisation du produit scalaire avec normes et angles.

Soient $A$, $B$, et $C$ des points du plan.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Démonstration

■

Remarques.

1. Ce résultat se généralise à d'autres vecteurs que les bipoints du plan et nous écrirons alors :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{u}|| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right).$$
Dans ce cas $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est appelé un angle orienté de vecteurs et il égale l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ obtenu en choisissant des représentants de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Nous avons : $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = -\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right)$

2. D'après la remarque précédente nous pourrons généraliser la formule à des couples quelconques de bipoints :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{EF}|| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}\right).$$

3. Nous retrouvons bien ce que nous avions déjà remarqué $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(0) = ||\overrightarrow{AB}||^2$.

## 3 Orthogonalité.

Définition 2

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Remarques.

1. L'orthogonalité est une notion proche de celle de la perpendicularité mais pour des vecteurs.
2. La notion d'orthogonalité est plus générale que celle de perpendicularité. Deux droites sont dites orthogonales si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux. Dans l'espace il existe des droites orthogonales qui ne sont pas perpendiculaires (pas de point commun).

Proposition 3 - Orthogonalité et perpendicularité dans le plan.

Si $A$, $B$, $E$ et $F$ sont des points distincts deux à deux du plan alors : $(AB) \perp (EF)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EF}$

## 4 Des propriétés algébriques du produit scalaire.

Proposition 4 - Propriétés algébriques du produit scalaire.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs, $\lambda$ un nombre réel.

(i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

(ii) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.

(iii) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.

(iv) $\lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v})$.

Démonstration

Indémontrable puisque nous n'avons pas de définition générale d'un vecteur. Nous n'avons construit en seconde que des vecteurs du plan comme des translations.

■

Remarques.

1. Nous pouvons interpréter ces propriétés avec le vocabulaire que nous connaissons déjà sur les lois (opérations) :
   (i) Commutativité.
   (ii) Distributivité à gauche du produit scalaire sur l'addition (de vecteurs).
   (iii) Distributivité à droite du produit scalaire sur l'addition (de vecteurs).
   (iv) Une sorte de commutativité entre le produit par un nombre et le produit scalaire.
2. La propriété (i) est appelée la *symétrie* du produit scalaire. Les propriétés (ii), (iii) et (iv) sont appelées la *bilinéarité* du produit scalaire.
3. Ces propriétés sont à l'origine de la définition la plus générale du produit scalaire (y compris pour des vecteurs qui ne sont pas des objets de géométrie) d'où le fait que nous insistions. Cependant dans la pratique, au lycée, il faut retenir que nous allons pouvoir manipuler les vecteurs comme des nombres pour travailler avec le produit scalaire. Ainsi qui dit distributivité, dit double distributivité et donc identités remarquables.
4. En toute rigueur la propriété (iv) fait intervenir trois opérations différentes : produit de deux nombres réels, multiplication d'un vecteur par un nombre, produit scalaire.
5. La distributivité apparaîtra souvent lorsque la relation de Chasles est utilisée : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZF}\right)$.

## 5 Caractérisation du produit scalaire avec des coordonnées.

Une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est dite orthonormée si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et que de plus : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$.

Proposition 5

Soient :
. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$,

. $\vec{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration

■

Remarques.

1. Le repère doit être orthonormal pour que le produit scalaire ainsi obtenu corresponde à celui défini par projection orthogonale. Cependant il est possible, dans un repère quelconque, de définir un autre produit scalaire par la formule $xx' + yy'$.

Corollaire 1

Soient :
. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$,

. $\vec{v}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Remarques.

1. Ainsi le produit scalaire nous permettra de vérifier l'orthogonalité de deux vecteurs et donc la perpendicularité de droites.

Corollaire 2

Soient :

. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = ||\vec{u}||^2$.

Remarques.

1. Autrement dit : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Ce résultat ne tient que parce que le repère est orthonormé.

## 6 Caractérisation du produit scalaire par la norme.

Nous savons calculer la norme avec le produit scalaire : $||AB||^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$, nous allons voir maintenant comment calculer le produit scalaire grâce à la norme.

Corollaire 3 - identités remarquables.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

(ii) $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

(iii) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{u}||^2$.

Démonstration

Se démontre en utilisant la distributivité vue dans la proposition 3. ■

Corollaire 4 - Identités de polarisation.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.

(iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}|| - ||\vec{u} - \vec{v}||\right)$.

Démonstration

Découle directement des résultats établis à la précédente proposition.

■

Remarques.

1. Il est possible de retrouver la norme à partir du produit scalaire : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ et nous voyons maintenant qu'il est possible de retrouver le produit scalaire à partir de la norme. Autrement dit il revient au même de se donner une norme ou un produit scalaire.

## II Vecteur normal à une droite du plan.

Définition 3

Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{n}$ un vecteur du plan.

Nous dirons que $\vec{n}$ est *un vecteur normal à $\mathscr{D}$* si et seulement si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et qu'il existe un vecteur directeur, $\vec{u}$, de $\mathscr{D}$ tel que $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Remarques.

1. Il est équivalent de dire que $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et de dire que que $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$.
2. Les vecteurs normaux et les vecteurs directeurs sont non nuls.
3. De même qu'un point et vecteur directeur (autrement dit un repère $(O;\vec{u})$) définissent une unique droite, un point $O$ et un vecteur normal $\vec{n}$ définie une unique droite (proposition suivante).

Exemples.

1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\26\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ car :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{n} &= 2\times 13 + (-1)\times 26\\ &= 0\end{aligned}$$

Proposition 6 - Une caractérisation.

Soient $\mathscr{D}$ une droite, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Nous dirons que $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$ si et seulement si est orthogonal à tout vecteur directeur $\mathscr{D}$.

Démonstration

Précédente définition, linéarité du produit scalaire, colinéarités des vecteurs directeurs entre eux.

■

Remarques.

1. Nous utiliserons ce résultat pour montrer qu'un vecteur n'est pas normal à une droite : si $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ alors $\vec{n}$ n'est pas normal à $\mathscr{D}$.

Exemples.

1. De même si $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur normal à $\mathscr{D}$ puisque $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux.

Proposition 7 - Caractérisation d'une droite par point et vecteur normal.

Soient :

. $\mathscr{D}$ une droite du plan,

. $A \in \mathscr{D}$,

. $M$ un point du plan.

. $\vec{n}$ une vecteur non nul.

$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Proposition 8 - Vecteur normal à une droite remarquable.

Soient :

. $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $\mathscr{D}$ une droite du plan,

. $a$ et $b$ des réels $a$ et $b$ n'étant pas simultanément nuls,

. $\overrightarrow{n}$ une vecteur non nul.

Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{D}$ admet $ax + by + c = 0$ pour équation cartésienne si et seulement si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.

# III Distance d'un point à une droite dans le plan.

Nous avions vu en seconde que, dans un plan, la distance d'un point $A$ à une droite $d$ est la longueur $AH$ où $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur $d$. De plus $H$ est le point de $d$ qui minimise la distance à $d$.

Proposition 9 - Distance d'un point à une droite dans un repère orthonormé.

Soient :

. $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan,

. $A$ un point du plan de coordonnées $(x_A, y_A)$,

. $\mathscr{D}$ une droite du plan dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ ($a$ et $b$ non tous deux nuls).

La distance de $A$ à $\mathscr{D}$ est

$$d(A, \mathscr{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration

Soit $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathscr{D}$.

Nous savons que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.

* En notant $\cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{n}\right) = \varepsilon \in \{-1; 1\}$ (puisque $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires), en utilisant la caractérisation du produit scalaire utilisant norme et cosinus :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n} &= \left\|\overrightarrow{AH}\right\| \times \left\|\overrightarrow{n}\right\| \times \varepsilon \\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n} &= \varepsilon AH\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$AH = \varepsilon\frac{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (1)$$

* En utilisant la caractérisation du produit scalaire utilisant les coordonnées des vecteurs.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n} &= (x_H - x_A)\times a + (y_H - x_A)\times b \\ &= ax_H + by_H - (ax_A + by_A)\end{aligned}$$

Or $H \in \mathscr{D}$ donc $ax_H + by_H = -c$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n} &= -c-(ax_A+by_A) \\ &= -(ax_A+by_A+c) \quad (2)\end{aligned}$$

* Par transitivité entre (1) et (2) :

$$AH = -\varepsilon\frac{ax_A+by_A+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Enfin, $AH$ étant une longueur, $AH = |AH|$ et donc :

$$AH = \left|\frac{ax_A+by_A+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Finalement

$$\boxed{AH = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.}$$

■

# IV Produit scalaire dans l'espace.

## 1 Définition, généralisation, caractérisation.

Étant donnés trois points $A$, $B$ et $C$ de l'espace il existe (au moins) un plan $\mathscr{P}$ qui les contient. Nous définirons le produit scalaire, dans l'espace, des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par le produit scalaire, dans le plan $\mathscr{P}$, des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 1. ⚽
Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur $a$ calculez les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{EB}$.

Correction de l'exercice 1

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$, $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB} = -a^2$ et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{EB} = 2a^2$.

Proposition 10 - caractérisation du produit scalaire par norme et angle.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$

## 2 Orthogonalité.

On généralise la définition de l'orthogonalité.

Définition 4

Soient :

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemples.

1. Sur un cube ...

## 3 Base orthonormée, repère orthonormé.

Définition 5

(i) On appelle *base orthonormale de l'espace* tout triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de trois vecteurs de l'espace tel que $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{0}$ et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}||$.

(ii) On appelle *repère orthonormal de l'espace* tout quadruplet $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où $O$ est un point et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormale.

## 4 Coordonnées

Proposition 11 - Caractérisation du produit scalaire avec des coordonnées.

Soient :

. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace,

. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Exercice 2.

Dans un repère orthonormal de l'espace démontrez que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exercice 3.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(1, 7, -2)$, $B(4, 6, -5)$ et $C(3, 1, 2)$.

1. Justifiez que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Qu'en déduisez-vous pour le triangle $ABC$.

Correction de l'exercice 3

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (4-1)\times(3-1)+(6-7)\times(1-7)+(-5-(-2))\times(2-(-2)) = 6+6-12 = 0$
2. $ABC$ rectangle en $A$.

Proposition 12 - Caractérisation de la norme par les coordonnées.

Soient :
. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace,
. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Corollaire 5 - Distance euclidienne dans l'espace.

Soient :
. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace,
. $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Exercice 4.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère les points $A(4, -2, 0)$, $B(6, 4, -2)$ et $C(12, 6, 0)$. Quelle la nature du triangle $ABC$ ?

Exercice 5.

Le plan étant rapporté à une repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ $A(3, 2, 1)$, $B(-2, 1, 5)$ et $C(1, 0, 1)$. Déterminez une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

## 5 Propriétés.

Proposition 13 - Forme bilinéaire symétrique.

Soient :
. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace,
. $\alpha$ et $\beta$ des réels.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité ou symétrie).
(ii) $\vec{u} \cdot \left(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}\right) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \vec{u} \cdot \vec{w}$ (bilinéarité).

## 6 Identités de polarisation.

Corollaire 6 - identités remarquables.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
(ii) $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
(iii) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{u}||^2$.

Proposition 14 - Caractérisation du produit scalaire par les identités de polarisation.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.
(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.
(iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}|| - ||\vec{u} - \vec{v}||\right)$.

# V Orthogonalité dans l'espace affine.

## 1 Orthogonalité de deux droites.

Définition 6

Deux droites sont dites orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Exemples.

1. Exemples sur un cube.

Proposition 15

Deux droites sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

Proposition 16 - Propriétés affines de l'orthogonalités des droites dans l'espace.

(i) Deux droites sont orthogonales si et seulement si il existe une troisième droite qui soit parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

(ii) Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

(iii) Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

(iv) Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires.

Remarques.

1. Rappelons que deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Exercice 6. ◕

Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne $A(1;0;2)$, $B(3,-3,3)$ et $C(-2,2,14)$. Démontrez que $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 6

Il faut penser en plus de l'orthogonalité à vérifier l'intersection.

## 2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Définition 7

*Une droite est dite orthogonale a un plan* si un vecteur directeur de la droite est orthogonal aux deux vecteurs d'une base du plan.

**Exercice 7.** ☯

Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-11)$, $C(-4,5,-9)$, $D(-8,3,4)$ et $E(-3,10,6)$.

1. Démontrez que les points $A$, $B$ et $C$ définissent bien un plan.
2. Démontrez que les droites $(AB)$ et $(DE)$ sont orthogonales.
3. Démontrez que la droite $(DE)$ est orthogonale au plan $(ABC)$.

**Proposition 17**

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si tout vecteur directeur de la droite est orthogonal à tout vecteur de la direction du plan

**Proposition 18 - Propriétés affines de l'orthogonalité entre droite et plan.**

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

(ii) Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

(iii) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

(iv) Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

(v) Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles entre eux.

## 3 Vecteur normal à un plan.

Les résultat de ce paragraphe sont spécifiques à l'espace de dimension trois.

**Définition 8**

Nous dirons qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est *normal à un plan* $\mathscr{P}$ s'il existe une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de $\mathscr{P}$ dont les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux à $\vec{n}$.

Remarques.

1. Tout plan admet un vecteur normal. Si c'est intuitif, la justification apparaîtra clairement avec les équations cartésienne du plan.

### Proposition 19

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de la direction de ce plan.

### Exercice 8.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2,-3,5)$, $B(1,0,7)$ et $C(-4,1,3)$.

1. Démontrez que $A$, $B$ et $C$ définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$.

### Exercice 9.

Soit $\mathscr{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\mathscr{P}$). Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$.

### Correction de l'exercice 9

$\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Supposons par exemple $x = 1$.

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ donc $1\times 1 + 1\times y + 2\times z = 0$ et $-1\times 1 + 2\times y + -3\times z = 0$.
Donc

$$\begin{cases} y + z = -1 \\ 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$z = -\frac{3}{5}$ et $y = -\frac{4}{5}$.

### Proposition 20

Étant donné un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point $A$, il existe un unique plan normal à $\vec{n}$ et passant par $A$.

### Remarques.

1. Ainsi pour définir un plan il n'est pas nécessaire de donner un point et une base. Pour définir un plan de l'espace il suffit de donner un point et un vecteur normal.
2. Une façon de voir que nous utiliserons plus tard pour l'équation cartésienne : le plan est formée de l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$.

Proposition 21

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

(ii) Un droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à vecteur normal à ce plan.

(iii) Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

## 4 Équations cartésiennes d'un plan.

Proposition 22 - Équations cartésiennes d'un plan.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace

$\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels qu'il existe des réels $a$, $b$, $c$ et $d$ (avec $a$, $b$ et $c$ non tous nuls) pour lesquels $ax + by + cz + d = 0$.

Remarques.

1. L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée *une équation cartésienne* du plan.
2. Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne d'un plan. Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation d'un plan alors $(ma)x + (mb)y + (mc)z + (md) = 0$ en est aussi une. Les coefficients des diverses équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnels les uns aux autres.

Corollaire 7

Soient :

. $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels $a$, $b$ et $c$ étant non tous nuls.

Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Exercice 10.

Vérifiez que $3x - 2y + z = 2$ est une équation cartésienne du plan $(ABC)$ où $A(1; 1; 1)$, $B(-1; -1; 3)$ et $C(2; 1; -2)$.

### Exercice 11.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : $A(4 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; 2)$.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan $(ABC)$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de $(ABC)$.

### Exercice 12.

Déterminez un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $2x + y - 3z + 14 = 0$.

### Exercice 13.

Soit $A(-1, 2, 5)$ un point de l'espace rapporté à un repère et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A$ et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B(3, 8, 7)$. Déterminez une équation du plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[AB]$.

### Exercice 14.

Soient $A(1, 0, 3)$, $B(2, 2, 7)$ et $C(-1, 5, 4)$ trois points de l'espace rapporté à un repère et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$.

1. Démontrez que les points $A$, $B$ et $C$ définissent un plan.
2. Démontrez que $\mathscr{P}$ est le plan $(ABC)$.
3. Déduisez-en un vecteur normal au plan $(ABC)$.

Correction de l'exercice 14

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$.

   $\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 5\end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times (-2) = 9 \neq 0.$

   Donc vecteurs non nuls et non colinéaires $A$, $B$ et $C$définissent bien un plan.
2. $2x_A + y_A - z_A + 1 = 2 \times 1 + 0 - 3 + 1 = 0$ donc $A \in \mathscr{P}$. De même pour $B$ et $C$.
3. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

**Exercice 15.** ☯

Dans l'espace rapporté à un repère, notons $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - 7z - 14 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \\ z = 19 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Déterminez l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

## 5 Système d'équations cartésiennes d'une droite. ☣

### Proposition 23

Si les triplets $(a_1, b_1, c_1)$ et $(a_2, b_2, c_2)$ ne sont pas proportionnels alors le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

caractérise une droite et il est appelé *système d'équations cartésiennes de cette droite*.

### Remarques.

1. Interprétation géométrique : toute droite est l'intersection de deux plans non parallèles.
2. Toute droite peut être caractérisée par un système d'équations cartésienne.
3. Ainsi il existe deux représentation analytique des droites : la représentation paramétrique et les équations cartésiennes.

**Exercice 16.** ⚽

Dans un repère orthonormé on considère $A(3; -3; 1)$, $B(2; -1; 2)$ et $C(-1; 1; -1)$.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $C$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminez une équation du plan $\mathscr{Q}$ médiateur de $[AC]$.
3. Donnez une représentation paramétrique de l'intersection entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
   *Vous pourrez poser $z = t$ dans les deux équations précédentes.*

### Correction de l'exercice 16

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $-x + 2y + z + d = 0.$
   $C$ appartient au plan donc $-(-1) + 2 \times 1 + (-1) + d = 0$ donc $d = -2$.
   $-x + 2y + z - 2 = 0.$

2. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$
   $-4x+4y-2z+d=0$.
   $I(1;-1;0)$.
   $-4-4+d=0$
   $-4x+4y-2z+8=0$.
3. Il faut choisir l'une des variables comme paramètre de la représentation paramétrique et résoudre le système.

$$\begin{cases}-x+2y+t-2=0\\-4x+4y-2t+8=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x+2y=-t+2\\-4x+4y=2t-8\end{cases}$$

   $-4y=6t-16$, $y=-\frac{3}{2}t+4$.
   $-2x=4t-12$, $x=-2t+6$.

## 6 Orthogonalité de deux plans.

Voici une définition théorique que nous n'utiliserons pour ainsi dire jamais.

Définition 9

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont dits *orthogonaux* (ou perpendiculaires) si et seulement si l'un contient une droite qui est perpendiculaire à une droite de l'autre.

Nous préférerons la caractérisation suivante :

Proposition 24

Soient :

. $\mathscr{P}_1$ un plan de l'espace dont $\overrightarrow{n}_1$ est un vecteur normal,

. $\mathscr{P}_2$ un plan de l'espace dont $\overrightarrow{n}_2$ est un vecteur normal.

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ sont orthogonaux.

Exercice 17. ☯

Démontrez que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x+3y+z=0$ et $-x+2y-4z=0$ sont orthogonaux.

Exercice 18. ⚽

On donne les points suivants $A(-2,1,3)$ et $B(1,-2,2)$ et $C(4,1,-1)$.

1. Démontrez que les points $A$, $B$ et $C$ définissent un seul plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminez une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\mathscr{P}$ passant par le point $A$.

Correction de l'exercice 18

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}$.
2. Il faut trouver un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$$\begin{cases} 3-3y+z=0 \\ 6-4z=0 \end{cases}$$

   $z=\frac{3}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$.

   $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

   Clairement $\overrightarrow{m}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.D'où une équation d'un plan orthogonal : $3x-2y+d=0$ et enfin $d=8$.

# VI Point et droite.

## 1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Définition 10

Soient :

. $M$ un point de l'espace,

. $\mathscr{D}$ un plan de l'espace.

Nous appellerons *projeté orthogonal* de $M$ sur $\mathscr{D}$, le point $H$ intersection de $\mathscr{D}$ et du plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par $M$.

Remarques.

1. Cette définition est aussi une proposition puisqu'elle sous-entend l'existence et l'unicité du projeté orthogonal.

Exercice 19.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(1;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$. Déterminez les coordonnées du point $H$, projeté orthogonal du point $B(-15;-10;4)$ sur la droite $\mathscr{D}$.

### 2 Distance d'un point à une droite.

Exercice 20.

Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{array} \right.$$

Montrez qu'il existe un unique point $H$ de $\mathscr{D}$ tel que la distance entre l'origine du repère $O$ et $H$ est minimale. Montrez que $(OH)$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.

Proposition 25

Le projeté orthogonal du point $M$ sur la droite $\mathscr{D}$ est le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de $M$.

## VII Point et plan.

### 1 Projeté orthogonal d'un point sur un plan.

Définition 11

Soient :

. $M$ un point de l'espace,

. $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.

Nous appellerons projeté orthogonal de $M$ sur $\mathscr{P}$, le point $H$ intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par $M$.

Remarques.

1. Cette définition est aussi une proposition puisqu'elle sous-entend l'existence et l'unicité du projeté orthogonal.

**Exercice 21.** ☯

Soit, dans l'espace rapporté à un repère, $\mathscr{P}$ le plan passant par le point $A(1,-2,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(-3,1,4)$.
Déterminez les coordonnées du point $H$, projeté orthogonal du point $B(-15,-10,4)$ sur le plan $\mathscr{D}$.

## 2 Distance d'un point à un plan.

### Proposition 26

Le projeté orthogonal du point $M$ sur le plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de $M$.

**Exercice 22.** ☯

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal on considère les points $A(2,3,3)$, $B(-1,17,-17)$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par $A$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. Démontrez que $H(-9,5,-1)$ appartient à $\mathscr{P}$.
2. Démontrez que $H$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $\mathscr{P}$ et déduisez-en la distance de $B$ à $\mathscr{P}$.
3. Soit $C(5,11,-5)$. Justifiez que $C$ est le projeté orthogonal de $H$ sur $(BC)$ puis calculez la distance de $H$ à $(BC)$.

**Exercice 23.** ⚽

Soient $A(8,10,5)$ un point et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-z+1=0$ dans l'espace muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal $H$ du point $A$ sur le plan $\mathscr{P}$.

**Exercice 24.** ⚽

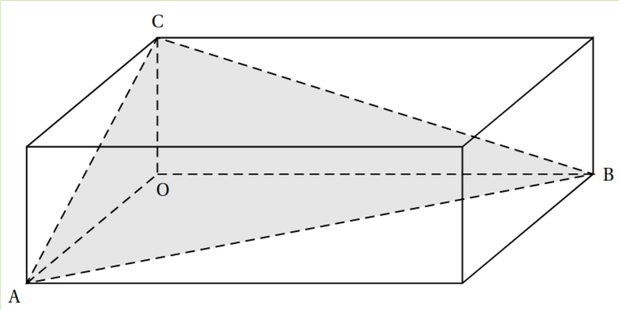
Soient $A(1;0;-2)$, $B(0;3;-1)$, $C(-1;2;1)$, $D(0;-1;0)$ et $S\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2};4\right)$ des points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Démontrez que $ABCD$ est un rectangle.
2. (a) Montrez que si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$ alors, pour tout point $M$ du plan $(ABC)$, on a $SH = \frac{|\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$, où $H$ est le projeté orthogonal de $S$ sur le plan $ABC$.
   (b) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $(ABC)$.
   (c) En déduire la hauteur $SH$ de la pyramide $SABCD$.
3. Calculez le volume de la pyramide $SABCD$.

# VIII Exercices.

Exercice 25. ☯

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A de coordonnées $(2\,;\,0\,;\,0)$, B de coordonnées $(0\,;\,3\,;\,0)$ et C de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.




L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+2y+6z-6=0$.

2. On note $d$ la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.

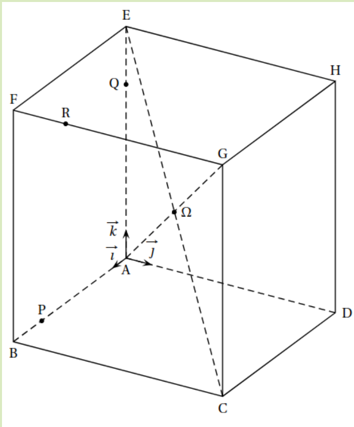
   (b) Montrer que la droite $d$ coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$.

   (c) Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

## Exercice 26.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre $\Omega$. Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.




**Partie I**

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;2\,;8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

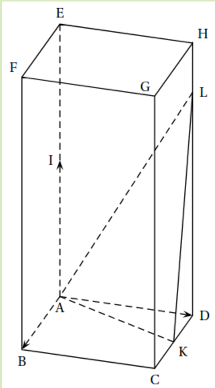
**Partie II**

On note L le projeté orthogonal du point $\Omega$ sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point $\Omega$ sont $(4\,;4\,;4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite $d$ perpendiculaire au plan (PQR) et passant par $\Omega$.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point $\Omega$ au plan (PQR).

## Exercice 27. ⚽

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous.
Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).




On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\Delta$ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{40}{49}\ ;\ \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Correction de l'exercice 27

1. $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

2. (a) $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ forment une base de $(AKL)$. Avec les coordonnées : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 0$. Donc $\overrightarrow{n}$ est normal à $(AKL)$.

   (b) $\overrightarrow{n}$ est normal à $(AKL)$ donc une équation cartésienne de la forme $6x-3y+2z+d=0$. De $A\in(AKL)$ on déduit $d=0$. $(AKL):\ 6x-3y+2z=0$.

   (c) $\Delta$ perpendiculaire à $(AKL)$ et $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $(AKL)$ donc $\overrightarrow{n}$ est vecteur directeur de $\Delta$.
   $\Delta$ passe ar $D$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ donc

$$\Delta : \begin{cases} x = 6t \\ y = -3t+1 \\ z = 2t \end{cases}$$

   (d) $N\left(3\times\frac{3}{49}; -3\times\frac{3}{49}+1; 2\times\frac{3}{49}\right)$ donc $N\in\Delta$.
   $6x_N - 3y_N + 2z_N = 0$ donc $N\in(AKL)$.
   Comme $D\in\Delta$, $N\in\Delta\cap(AKL)$ et $\Delta$ perpendiculaire à $(AKL)$, $N$ est le projeté orthogonal de $D$ sur $(AKL)$.

3. (a) $\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.

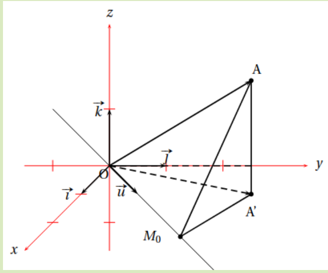
   (b) $d((AKL);D) = DN = \left\|\overrightarrow{DN}\right\| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{DN}} + y^2_{\overrightarrow{DN}} + z^2_{\overrightarrow{DN}}} = \frac{21}{7}$.

   (c) $\mathscr{A} = 3\times\frac{1}{ND}\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.

## Exercice 28.

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées (1 ; 3 ; 2),
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite $d$ passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.




Le but de cet exercice est de déterminer le point de $d$ le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.
2. Soit $t$ un nombre réel quelconque, et $M$ un point de la droite $d$, le point $M$ ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On note A$M$ la distance entre les points A et $M$. Démontrer que :
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   (b) Démontrer que le point $M_0$ de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite $d$ pour lequel la distance $AM$ est minimale.
   On admettra que la distance $AM$ est minimale lorsque son carré $AM^2$ est minimal.
3. Démontrer que les droites $(AM_0)$ et $d$ sont orthogonales.
4. On appelle $A'$ le projeté orthogonal du point $A$ sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point $A'$ admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   Démontrer que le point $M_0$ est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire
   d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.