Produit scalaire dans l'espace.

Définition du produit scalaire dans l'espace.

Orthogonalité.

Norme.

Produit scalaire et angles.

Formules de polarisation.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

EXERCICE 1. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(1;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$. Déterminez les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $B(-15;-10;4)$ sur la droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2. Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\mathscr{D}:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=4+2t\end{cases}$.
Montrez qu'il existe un unique point H de $\mathscr{D}$ tel que la distance entre l'origine du repère O et H est minimale. Montrez que (OH) et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.

Exercices.

EXERCICE 3. Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur a calculez les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{EB}$.

EXERCICE 4. Dans un repère orthonormal de l'espace démontrez que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\14\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 5. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(1{,}7,-2)$, $B(4{,}6,-5)$ et $C(3{,}1{,}2)$.

1. Justifiez que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Qu'en déduisez-vous pour le triangle ABC.

EXERCICE 6. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère les points $A(4,-2,0)$, $B(6,4,-2)$ et $C(12,6,0)$. Quelle la nature du triangle ABC ?

EXERCICE 7. Le plan étant rapporté à une repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ $A(3{,}2{,}1)$, $B(-2{,}1{,}5)$ et $C(1{,}0{,}1)$. Déterminez une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

EXERCICE 8. $ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $AB=5$, $AD=3$ et $AE=2$.

1. Justifiez que (EC) et (AG) sont sécantes en un point M.
2. (a) Justifiez que $\left(A;\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.
   (b) Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points G, M et C.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{GMC}$ au degré près.

EXERCICE 9. Soit $ABCD$ un losange de centre O tel que $AC=6$ et $BD=8$. Calculez les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$. b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$. c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AO}$. d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$. e) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OC}$.

EXERCICE 10.

1. Soit $\mathscr{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Déterminez la nature de l'ensemble (S_1) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 2 = 0$.
2. Soient les points $A(2,-1;3)$ et $B(4;1;3)$.
   (a) Déterminez une équation de l'ensemble (S_2) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
   (b) Précisez la nature de l'ensemble (S_2).
3. Plus généralement, dans l'espace, soient A et B deux points distincts. On cherche à déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
   (a) Soit Ile milieu du segment $[AB]$, montrez que pour tout point M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
   (b) Déduisez-en que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est une sphère dont on précisera le centre, le rayon et un diamètre.