Vecteurs, droites et plans de l'espace.

I Vecteurs de l'espace.

1 Généralisations.

Définition 1

Soient :

. t une translation de $\mathscr{E}_3$ de vecteur $\vec{u}$,

. M et N deux points de $\mathscr{E}_3$.

Si $t(M) = N$, alors nous dirons que $\overrightarrow{MN}$ est *un représentant du vecteur $\vec{u}$* correspondant à la translation qui transforme M en N.

Définition 2

Soient :

. A, B, M et N des points de $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que les représentants *$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux* si et seulement si il existe une translation t (de vecteur $\vec{u}$) telle que $t(M) = N$ et $t(A) = B$.

Proposition 1

Deux représentants $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'un vecteur $\vec{u}$ sont égaux si et seulement si $ABNM$ est un parallélogramme.

2 Somme de vecteurs.

Définition 3

Soient :

. t_1 et t_2 deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{w}$,

. M et N deux points de l'espace $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que N est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{w}$ si

$$t_2 \circ t_1(M) = t_2\left[t_1(M)\right] = N.$$

Remarques.

1. Ceci signifie notamment que $\vec{u} + \vec{w}$ est aussi un vecteur.
2. Nous voyons que l'addition de vecteur "correspond" à la composition de translations en tant que fonctions.

3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Définition 4

Soient :

. $\lambda \in \mathbb{R}$,

. $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$.

Nous appellerons *produit de $\vec{u}$ par (le scalaire) λ* le vecteur noté $\lambda \cdot \vec{u}$ (ou $\lambda\vec{u}$) défini par :

(i) $||\lambda \cdot \vec{u}|| = |\lambda| \times ||\vec{u}||$.

(ii) $\lambda \cdot \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.

(iii) $\lambda \cdot \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont
- de même sens si $\lambda \geqslant 0$,
- de sens contraire si $\lambda < 0$.

Remarques.

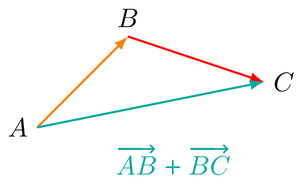
1. La multiplication par un scalaire est une opération qui n'est définie qu'à droite. On n'écrira pas : $\overrightarrow{AB} \cdot 2$ mais bien $2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

4 Les propriétés.

Proposition 2 - Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



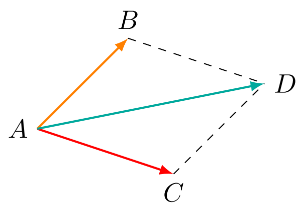
Remarques.

1. Pour dessiner le représentant de la somme il faut choisir deux représentants des vecteurs qui « se suivent » : l'extrémité d'un représentant est l'origine de l'autre représentant à sommer.
2. Nous utiliserons aussi cette relation pour « calculer » avec des vecteurs, *i.e.* essentiellement pour simplifier les expressions.
   $-\vec{u}$ a le même sens et la même direction que $\vec{u}$ mais est de sens contraire.
3. Il faut imaginer cette relation en trois dimensions comme dans l'exercice qui suit.

Proposition 3 - Identité du parallélogramme.

Soient A, B, C et D des points d'un même plan.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



Remarques.

1. Nous utiliserons ce résultat pour dessiner le vecteur somme lorsque les représentants additionnés ont la même origine.
2. Cette identité est plus rarement utilisée dans les calculs que la relation de Chasles.
3. Il faut imaginer cette relation en trois dimensions comme dans l'exercice qui suit.

Proposition 4

Soient :

. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathscr{E}_3$,

. λ et μ des réels.

Les propriétés suivantes sont vraies.

(i) $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

(ii) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

(iii) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

(iv) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

(v) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$.

(vi) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \mu + \mu \cdot \vec{v}$.

(vii) $(\lambda\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$.

(viii) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Remarques.

1. Ces propriétés ne doivent pas être apprises par cœur : il faut simplement retenir que l'on retrouve les loi habituelles qui régissent l'addition et a multiplication des réels.
2. La propriété (i) signifie que $\vec{0}$ est un neutre pour l'addition.
3. La propriété (ii) signifie que l'addition de vecteurs est associative. L'écriture de parenthèses, lorsqu'il ny a que des additions, n'est pas indispensable.
4. La propriété (iii) signifie que tout vecteur est inversible pour l'addition (existence d'un opposé).
5. Les propriétés (i), (ii) et (iii) combinées montrent que l'ensemble de tous les vecteurs du plan muni de l'addition forme un groupe.
6. La propriété montre que l'addition est commutative. L'ensemble des vecteurs de l'espace forme un groupe abélien.
7. Toutes les propriétés réunies forment la définition général d'un espace vectoriel.

5 Colinéarité.

Définition 5

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que

$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$

Remarques.

1. Nous pouvons voir la chose comme une sorte de rapport de proportionnalité entre les vecteurs.
2. Il suffit d'établir l'une des deux égalités pour établir la colinéarité de deux vecteurs.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
4. L'expression « colinéarité » signifie que les vecteurs représenterons la même « ligne », c'est-à-dire la même droite. Nous reverrons cela en disant que deux vecteurs colinéaires sont des vecteurs directeurs des mêmes droites.
5. Des vecteur qui ne sont pas colinéaires seront dit *linéairement indépendants* : ils ne dessinent pas les mêmes lignes, la même direction.
6. Sens, direction et norme...

6 Combinaisons linéaires.

Définition 6

Soient :

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}_3$,

. λ et μ des réels.

Nous appellerons *combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$* tout vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$.

Proposition 5

Soient :

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{E}_3$,

. $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire telle que $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \vec{0}$ et λ et μ ne sont pas tous les deux nuls.

Remarques.

1. Cette caractérisation de la colinéarité a l'avantage de ne pas contenir les deux possibilités de la définition (« ou »).

7 Vecteurs linéairement indépendants et base.

Définition 7

Soient :

. $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

. $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ des vecteurs de $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont *linéairement indépendants* (ou *libres*) lorsque, pour que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$, il faut forcément que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Remarques.

1. Nous retrouvons ici une généralisation des notions de vecteurs linéairement indépendants.
2. lorsque trois vecteurs de l'espace ne sont pas linéairement indépendant nous dirons qu'ils sont *coplanaire*.

Définition 8

Soient :

. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une *base* de $\mathscr{E}_3$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

8 Coordonnées.

Théorème 1 et définition.

Soient :

. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{E}_3$,

. $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$.

Il existe un unique triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Nous dirons que (x,y,z) sont *les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$*.

Remarques.

1. Autrement dit pour trouver les coordonnées d'un vecteur il suffit de l'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Proposition 6 - coordonnées affines et vectorielles.

Soient :

. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{E}_3$,

. I, J et K les images respective de O dans les translations de vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$,

. A un point de coordonnées (x_A,y_A,z_A) dans (O,I,J,K),

. B un point de coordonnées (x_B,y_B,z_B) dans (O,I,J,K).

Les coordonnées du représentant $\overrightarrow{AB}$ sont données par

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Remarques.

1. Le repère (affine) (O,I,J,K) sera aussi noté $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Proposition 7

Soient :

. $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace $\mathscr{E}_3$,

. $\lambda \in \mathbb{R}$,

. $\vec{u}(x,y,z)$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathscr{B}$,

. $\vec{v}(r,s,t)$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathscr{B}$.

On a :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+r\\y+s\\z+t\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda\times x\\\lambda\times y\\\lambda\times z\end{pmatrix}.$$

Remarques.

1. Ce résultat explique que nous préférions noter les coordonnées des vecteurs en colonnes : on additionne et on multiplie en suivant les lignes des coordonnées présentées en colonnes.

   Nous pourrions (mais nous ne le ferons pas car c'est une approche différente de la question) définir l'addition des coordonnées :

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4\\2+5\\3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}.$$

II Droites de l'espace.

1 Définition.

Définition 9

Soient :

. A et B deux points distincts de l'espace affine $\mathscr{E}_3$.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. La définition ci-dessus donne ce que l'on nomme un lieu géométrique : un procédé pour décrire la droite.

Nous en utiliserons un autre qui sera souvent plus pratique : la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$

où λ parcours l'ensemble des réels.
Avec une notation ensembliste et le quantificateur existentiel $\exists$ on peut écrire :

$$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E}_3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \right\}.$$

2. $\overrightarrow{AB}$ représente un vecteur $\vec{u}$ que nous appellerons un *vecteur directeur* de (AB).
   De façon plus générale nous appellerons vecteur directeur de la droite (AB) tout vecteur <u>non nul</u> colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
3. On remarque qu'*une droite est entièrement caractérisée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur*. Autrement dit pour parler d'une droite on peut en donner deux points distincts (A et B) ou en donner un point (A) et un vecteur directeur ($\vec{u}$).

2 Représentation paramétrique d'une droite.

Proposition 8 et définition.

Soient :

. $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

. $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace,

. $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & at + x_A \\ y & = & bt + y_A \\ z & = & ct + z_A \end{array} \right.$$

Nous dirons alors que ce système d'équation est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathscr{D}$.

<u>Remarques.</u>

1. En physique nous utiliserons une notation fonctionnelle pour indiquer la dépendance de x à t : $x(t) = at + x_A$.
   D'ailleurs si $x(t)$ représente l'abscisses d'un point M, t sera souvent le temps.
2. Chaque vecteur directeur de la droite donne une nouvelle représentation paramétrique : il y a donc une infinité de représentations paramétriques d'une droite.
3. Formellement (il ne faut pas l'écrire comme ceci) la représentation paramétrique correspond à : $M = \vec{u}t + A$.
4. Il n'est pas forcément étonnant que la représentation paramétrique d'une droite fasse apparaître des fonctions affines.

3 Droites sécantes.

Définition 10

Deux droites de l'espace sont dites sécantes si leur intersection est réduite à un point.

4 Droites parallèles.

Définition 11

Deux droites de l'espace sont dites parallèles si au moins un vecteur directeur de l'une est colinéaire à au moins un vecteur directeur de l'autre.

Remarques.

1. Si les deux vecteurs directeurs sont effectivement colinéaires alors tous les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires entre eux.
2. Le parallélisme inclus le cas des droites confondues.

5 Droites coplanaires.

Définition 12

Deux droites de l'espace sont dites coplanaires si elles sont sécantes ou parallèles.

6 Droites non coplanaires.

Proposition 9

Deux droites sont non coplanaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et si leur intersection est vide.

III Plans de l'espace.

1 Définition.

Définition 13

Soient :

. A, B et C trois points distincts deux à deux et non alignés de l'espace affine $\mathscr{E}_3$.

Nous noterons (ABC), et nous appellerons *plan passant par A, B et C*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarques.

1. Autrement dit :
$$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E}_3 \mid \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \right\}.$$
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ jouent, pour les plans, le même rôle que le vecteur directeur pour la droite. Ils indiquent *la direction* du plan. La direction du plan est l'ensemble des tous les vecteurs qui peuvent être obtenus comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Dire que A, B et C sont trois points distincts deux à deux et non alignés équivaut à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Autrement dit $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC).
4. On remarque qu'*un plan est entièrement caractérisé par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires de sa direction*. Autrement dit pour parler d'une plan on peut en donner trois points distincts non alignés (A, B et C) ou en donner un point (A) et deux vecteurs non colinéaires de sa direction ($\vec{u}$ et $\vec{v}$).

5. Comme pour les droites il existe une représentation paramétrique mais celle-ci fait intervenir deux paramètres. S'il peut arriver que nous la rencontrions nous n'en ferons pas un grand usage.

2 Position relative d'une droite et d'un plan.

Définition 14

Une droite et un plan de l'espace sont sécants si et seulement si leur intersection est réduite à un point.

Définition 15

Une droite et un plan de l'espace sont parallèles si au moins un vecteur directeur de la droite est colinéaire à au moins un vecteur de la direction du plan.

Remarques.

1. Autrement dit il faut et il suffit qu'un vecteur directeur (de la droite) soit une combinaison linéaire des vecteurs d'une base du plan.

3 Plans parallèles.

4 Plans sécants.