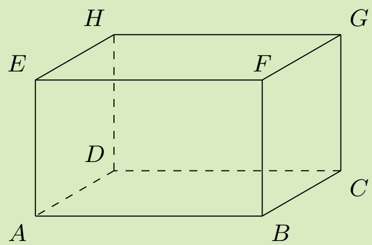
Vecteurs, droites et plans de l'espace.

I Vecteurs de l'espace.

1 Généralisations.

Exercice 1.

On considère le parallélépipède rectangle (pavé droit) suivant :



Donnez sans justification d'autres représentants des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$. b) $\overrightarrow{EF}$. c) $\overrightarrow{CA}$. d) $\overrightarrow{AE}$.

e) $\overrightarrow{CF}$. f) $\overrightarrow{FB}$. g) $\overrightarrow{CG}$. h) $\overrightarrow{CD}$.

i) $\overrightarrow{CH}$. j) $\overrightarrow{BH}$. k) $\overrightarrow{GD}$. l) $\overrightarrow{GH}$.

m) $\overrightarrow{DB}$. n) $\overrightarrow{HF}$. o) $\overrightarrow{DF}$. p) $\overrightarrow{DE}$.

q) $\overrightarrow{BG}$. r) $\overrightarrow{AF}$. s) $\overrightarrow{BE}$. t) $\overrightarrow{HD}$.

u) $\overrightarrow{HB}$. v) $\overrightarrow{AH}$. w) $\overrightarrow{GA}$. x) $\overrightarrow{AD}$.

y) $\overrightarrow{CB}$.

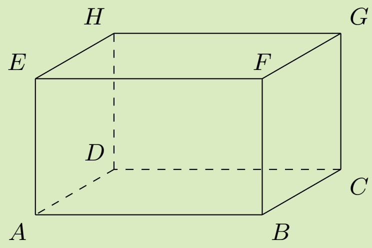
2 Somme de vecteurs.

3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

4 Les propriétés.

Exercice 2.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :



Exprimez les sommes de vecteurs suivantes sous forme d'un seul représentant faisant intervenir uniquement les points de la figure.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}$.

c) $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{HG}$.

e) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EA}$.

f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GF}$.

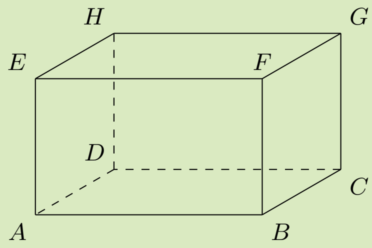
Exercice 3.

Démontrez.

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
3. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
5. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

Exercice 4.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :



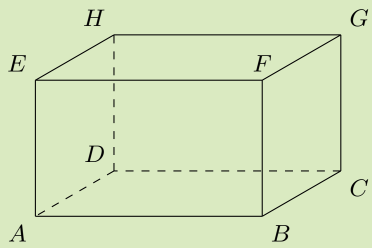
Simplifiez les sommes suivantes sous forme d'un seul représentant.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FH}$.
c) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}$.
d) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}$.
e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$.
f) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE}$
g) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AB}$.
h) $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FH}$

5 Colinéarité.

Exercice 5.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :



Dites, sans justifier, si, dans les cas suivants, les deux vecteurs proposés sont linéairement indépendants ou colinéaires.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FH}$.
c) $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HG}$.
d) $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EH}$.
e) $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GH}$.
f) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BG}$.
g) $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{FA}$.
h) $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
i) $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{GC}$.

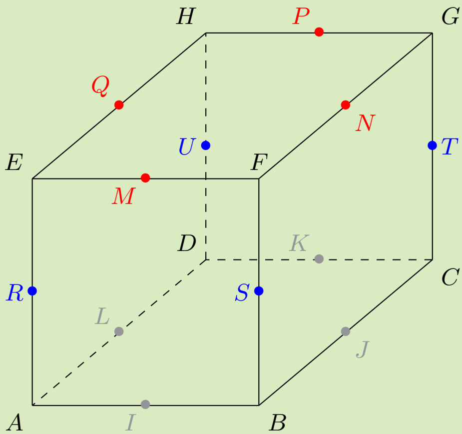
6 Combinaisons linéaires.

Exercice 6.

Établissez une relation de colinéarité entre les représentant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sachant que

Exercice 7.

On a dessinée ci-dessous le cube $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.



1. Exprimez les combinaisons linéaires suivantes sous forme d'un seul représentant.

   a) $2 \cdot \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{FD}$.

   b) $4 \cdot \overrightarrow{LK} + 2 \cdot \overrightarrow{CA}$.

   c) $2 \cdot \overrightarrow{DM} + 2 \cdot \overrightarrow{QH} + 2 \cdot \overrightarrow{NK}$.

   d) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HF}$.

2. Proposez une combinaison linéaire

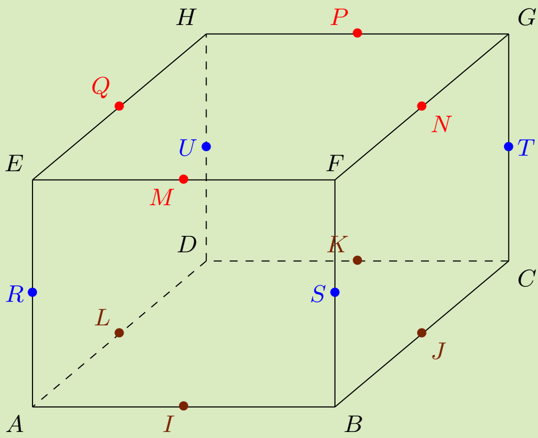
   a) de $\overrightarrow{RM}$ et de $\overrightarrow{NP}$ qui égale $\overrightarrow{BD}$.

   b) de $\overrightarrow{HU}$ et $\overrightarrow{DB}$ qui égale $\overrightarrow{FD}$.

7 Vecteurs linéairement indépendants et base.

Exercice 8.

On a dessinée ci-dessous le cube $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.

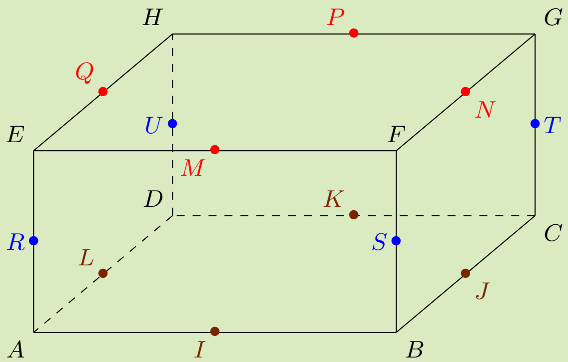


Proposez dix bases différentes de $\mathscr{E}_3$ en utilisant des représentants dont les extrémités apparaissent dans la figure ci-dessus.

8 Coordonnées.

Exercice 9.

On a dessinée ci-dessous un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteurs dans la base proposée.

a) $\overrightarrow{AG}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HG}\right)$.

c) $\overrightarrow{DH}$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF}\right)$.

d) $\overrightarrow{AN}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

e) $\overrightarrow{QM}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

f) $\overrightarrow{PJ}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Exercice 10. ☯

Dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-57\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\1\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi^3}\\\sqrt{\pi}\\\pi\end{pmatrix}$.

Exercice 11. ☯

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 12.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 13.

Soient $A(1,2,3)$, $B(2,0,3)$, et $C(6,3,8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas liés.
2. Déterminez α, β et γ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$

3. Déterminez α', β' et γ' tels que :

$$\overrightarrow{BC} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}.$$

4. Déduisez-en les coordonnées du point C dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 14.

On considère les points $A(1,2,3)$, $B(-1,1,4)$ et $C(3,5,-2)$ dans un repère (O,I,J,K).
Déterminez les coordonnées du point D telles ue $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 15.

On considère les points $A(1,2,1)$, $B(3,-1,2)$ et $C(-1,3,4)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Déterminez les coordonnées du milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 16.

Soient les points $A(-1,4,-3)$ et $B(2,1,3)$ dans un repère (O,I,J,K).
Déterminez les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 17.

On considère les points $A(0{,}1{,}1)$, $B(2{,}1{,}1)$, $C(3{,}1{,}1)$ et $D(1{,}1{,}1)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2{,}2{,}4)$.
   Déterminez les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soient J le milieu de $[EF]$ et I le point tel que F soit le milieu de $[AI]$.
   Démontrez que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 18.

Soient $A(1{,}2{,}1)$, $B(1,-1{,}1)$ et $C(3{,}1{,}2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $(E(3{,}7{,}2)$. déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$.
   Les points G, J et F sont-ils alignés ?

Exercice 19.

Soient $A(3,-2,-4)$, $B(4,-3,-2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils liés ?

Exercice 20.

Soient $A(2{,}4,-1)$, $B(3{,}1{,}2)$, $C(1{,}0{,}1)$, $D(3{,}2{,}1)$ et $E(1{,}2{,}0)$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas liés.
2. Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Où se situe le point M ?
4. Déterminez α, β, γ tels que :

   $$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}.$$

   Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$?

II Droites de l'espace.

1 Définition.

2 Représentation paramétrique d'une droite.

Exercice 21. ⚽

Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,

b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,

c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

d) $A(100;2{,}4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,

f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,

g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,

h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,

i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,

j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,

k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,

l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

Exercice 22. ⚽

Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les équation paramétriques sont données :

a) $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -4t+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -2t+2 \\ y = t-2 \\ z = 6t+3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t-3 \\ z = t+2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t-3 \\ z = 4 \end{cases}$

Exercice 23. ⚽

3 Droites sécantes.

Exercice 24.

Déterminez si les droites suivantes de $\mathscr{E}_3$ rapporté à un repère, sont sécantes.

a) Δ_1 qui passe par $A_1(1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et Δ_2 qui passe par $A_2(-1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}$

b) $\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & -2t-3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$ et $\Delta_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & 3t-3 \\ z & = & 4+1 \end{array}\right.$

4 Droites parallèles.

Exercice 25.

Déterminez les droites parallèles parmi
$\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t+1 \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & -t+1 \end{array}\right.$, $\Delta_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-17 \\ y & = & -5t+7 \\ z & = & t+45 \end{array}\right.$, $\Delta_3 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4t+24 \\ y & = & -10t-3 \\ z & = & 2t-\pi \end{array}\right.$, $\Delta_4 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t+12 \\ y & = & 2t-18 \\ z & = & -t+34 \end{array}\right.$, $\Delta_5 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -6t+1 \\ y & = & -4t-3 \\ z & = & 2t+1 \end{array}\right.$.

Exercice 26.

Soient $\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7t-2 \\ y & = & -2t+3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$ une droite et $A(1{,}0{,}1)$ un point.
Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ_2 parallèle à Δ_1 et passant par A.

Exercice 27. ⚽

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
L'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.
On appelle I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$.
Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Déterminez les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrez que (EF) est parallèle à (IJ).

Exercice 28.

1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1,-1{,}3)$ et $B(3{,}2{,}4)$.
2. On considère le point $E(-5{,}7{,}1)$.
   Déterminez une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB).
3. On considère le point $F(-1{,}13{,}3)$.
   (a) Justifiez que (AF) et d ne sont pas parallèles.
   (b) Déterminez les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

5 Droites coplanaires.

6 Droites non coplanaires.

Exercice 29.

Exercice 30.

Soient d et d' deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} -2t+3 \\ y = -3t+1 \\ z = t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$d' : \begin{cases} t'-1 \\ y = -2t' \\ z = 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Pour chaque droite donnez un point et un vecteur directeur.
2. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? sécantes ?
3. Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 31.

Dans chaque cas étudiez la position relative des droites d et d'.

$$d : \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1.

Exercice 32.

Exercice 33.

Exercice 34.

Exercice 35.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ; **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
   Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ; **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

   Réponse A : $\begin{pmatrix}1{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$;
   Réponse C : $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=t \\ z=2 \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\left\{\begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$

   Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=1+t \\ z=2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2-2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$

4. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

   Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
   Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

III Plans de l'espace.

1 Définition.

2 Position relative d'une droite et d'un plan.

Exercice 36.

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = \frac{1}{2}t + 6 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Donnez un vecteur directeur de d.
2. Soit $\mathscr{P}$ un plan dont un repère est $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(-1,2,5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}$.
   (a) Le point $E(1,1,1)$ appartient-il à ce plan ?
   (b) La droite d est-elle parallèle à $\mathscr{P}$? Justifier.
   (c) Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ contenant E, de vecteur directeur $\vec{u}$.
   Que peut-on dire de Δ et de $\mathscr{P}$?

Exercice 37.

3 Plans parallèles.

4 Plans sécants.