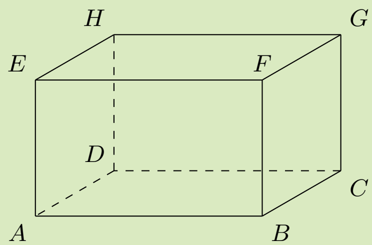
# Vecteurs, droites et plans de l'espace.

## I Vecteurs de l'espace.

### 1 Généralisations.

Exercice 1.

On considère le parallélépipède rectangle (pavé droit) suivant :




Donnez sans justification d'autres représentants des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{EF}$.
c) $\overrightarrow{CA}$.
d) $\overrightarrow{AE}$.
e) $\overrightarrow{CF}$.
f) $\overrightarrow{FB}$.
g) $\overrightarrow{CG}$.
h) $\overrightarrow{CD}$.
i) $\overrightarrow{CH}$.
j) $\overrightarrow{BH}$.
k) $\overrightarrow{GD}$.
l) $\overrightarrow{GH}$.
m) $\overrightarrow{DB}$.
n) $\overrightarrow{HF}$.
o) $\overrightarrow{DF}$.
p) $\overrightarrow{DE}$.
q) $\overrightarrow{BG}$.
r) $\overrightarrow{AF}$.
s) $\overrightarrow{BE}$.
t) $\overrightarrow{HD}$.
u) $\overrightarrow{HB}$.
v) $\overrightarrow{AH}$.
w) $\overrightarrow{GA}$.
x) $\overrightarrow{AD}$.
y) $\overrightarrow{CB}$.

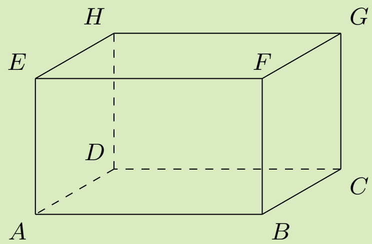
### 2 Somme de vecteurs.

### 3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

### 4 Les propriétés.

## Exercice 2.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :




Exprimez les sommes de vecteurs suivantes sous forme d'un seul représentant faisant intervenir uniquement les points de la figure.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}$.

c) $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{HG}$.

e) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EA}$.

f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GF}$.

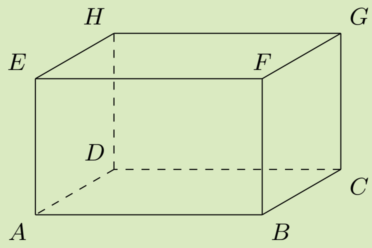
## Exercice 3.

Démontrez.

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
3. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
5. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

Exercice 4.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :



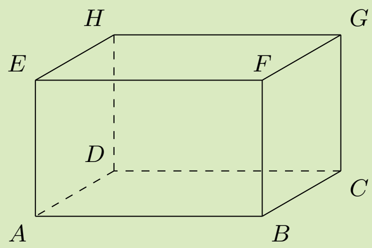

Simplifiez les sommes suivantes sous forme d'un seul représentant.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FH}$.
c) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}$.
d) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH}$.
e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$.
f) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GE}$
g) $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{AB}$.
h) $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FH}$

## 5 Colinéarité.

Exercice 5.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :




Dites, sans justifier, si, dans les cas suivants, les deux vecteurs proposés sont linéairement indépendants ou colinéaires.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FH}$.
c) $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HG}$.
d) $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EH}$.
e) $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GH}$.
f) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BG}$.
g) $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{FA}$.
h) $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
i) $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{GC}$.

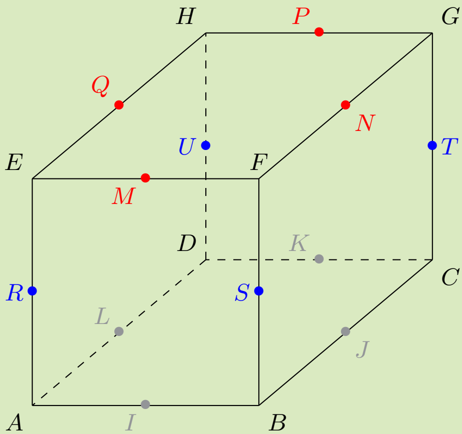
## 6 Combinaisons linéaires.

Exercice 6.

Établissez une relation de colinéarité entre les représentant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sachant que

Exercice 7.

On a dessinée ci-dessous le cube $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.




1. Exprimez les combinaisons linéaires suivantes sous forme d'un seul représentant.

   a) $2 \cdot \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{FD}$.

   b) $4 \cdot \overrightarrow{LK} + 2 \cdot \overrightarrow{CA}$.

   c) $2 \cdot \overrightarrow{DM} + 2 \cdot \overrightarrow{QH} + 2 \cdot \overrightarrow{NK}$.

   d) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HF}$.

2. Proposez une combinaison linéaire

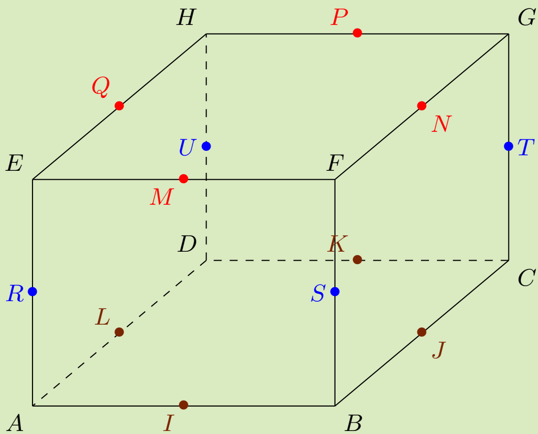
   a) de $\overrightarrow{RM}$ et de $\overrightarrow{NP}$ qui égale $\overrightarrow{BD}$.

   b) de $\overrightarrow{HU}$ et $\overrightarrow{DB}$ qui égale $\overrightarrow{FD}$.

## 7 Vecteurs linéairement indépendants et base.

Exercice 8.

On a dessinée ci-dessous le cube $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.

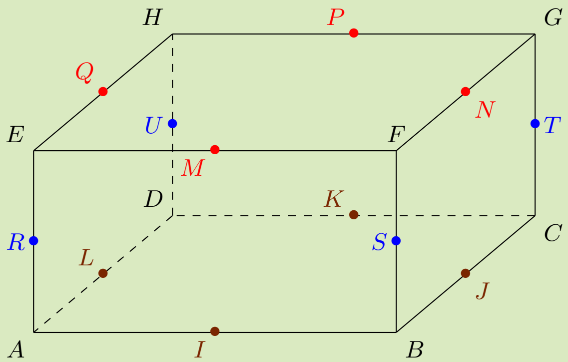



Proposez dix bases différentes de $\mathscr{E}_3$ en utilisant des représentants dont les extrémités apparaissent dans la figure ci-dessus.

## 8 Coordonnées.

## Exercice 9.

On a dessinée ci-dessous un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.




Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteurs dans la base proposée.

a) $\overrightarrow{AG}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HG}\right)$.

c) $\overrightarrow{DH}$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF}\right)$.

d) $\overrightarrow{AN}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

e) $\overrightarrow{QM}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

f) $\overrightarrow{PJ}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

## Exercice 10. ☯

Dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-57\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\1\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi^3}\\\sqrt{\pi}\\\pi\end{pmatrix}$.

## Exercice 11. ☯

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

## Exercice 12.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

## Exercice 13.

Soient $A(1{,}2{,}3)$, $B(2{,}0{,}3)$, et $C(6{,}3{,}8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas liés.
2. Déterminez $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que :
$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$
3. Déterminez $\alpha'$, $\beta'$ et $\gamma'$ tels que :
$$\overrightarrow{BC} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}.$$
4. Déduisez-en les coordonnées du point $C$ dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

## Exercice 14.

On considère les points $A(1{,}2{,}3)$, $B(-1{,}1{,}4)$ et $C(3{,}5,-2)$ dans un repère $(O,I,J,K)$.
Déterminez les coordonnées du point $D$ telles ue $ABCD$ soit un parallélogramme.

## Exercice 15.

On considère les points $A(1{,}2{,}1)$, $B(3,-1{,}2)$ et $C(-1{,}3{,}4)$ dans un repère $(O,I,J,K)$.

1. Déterminez les coordonnées du milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées de $D$ telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

## Exercice 16.

Soient les points $A(-1{,}4,-3)$ et $B(2{,}1{,}3)$ dans un repère $(O,I,J,K)$.
Déterminez les coordonnées du point $M$ vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

## Exercice 17.

On considère les points $A(0{,}1{,}1)$, $B(2{,}1{,}1)$, $C(3{,}1{,}1)$ et $D(1{,}1{,}1)$ dans un repère $(O{,}I{,}J{,}K)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2{,}2{,}4)$.
   Déterminez les coordonnées du point $F$ telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soient $J$ le milieu de $[EF]$ et $I$ le point tel que $F$ soit le milieu de $[AI]$.
   Démontrez que $J$ est le milieu de $[IC]$.

## Exercice 18.

Soient $A(1{,}2{,}1)$, $B(1,-1{,}1)$ et $C(3{,}1{,}2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note $I$ le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point $G$ (centre de gravité du triangle $ABC$) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $(E(3{,}7{,}2)$. déterminez les coordonnées du point $F$ tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note $J$ le milieu de $[BE]$.
   Les points $G$, $J$ et $F$ sont-ils alignés ?

## Exercice 19.

Soient $A(3,-2,-4)$, $B(4,-3,-2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminez les coordonnées du point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils liés ?

## Exercice 20.

Soient $A(2{,}4,-1)$, $B(3{,}1{,}2)$, $C(1{,}0{,}1)$, $D(3{,}2{,}1)$ et $E(1{,}2{,}0)$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas liés.
2. Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Où se situe le point $M$ ?
4. Déterminez $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}.$$

   Quelles sont les coordonnées de $E$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ ?

# II Droites de l'espace.

## 1 Définition.

## 2 Représentation paramétrique d'une droite.

Exercice 21. ⚽

Donnez une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,

b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,

c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

d) $A(100;2,4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times 10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,

f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,

g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,

h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,

i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,

j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,

k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,

l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

Exercice 22. ⚽

Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les équation paramétriques sont données :

a) $\begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= 2t-3 \\ z &= -4t+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x &= -2t+2 \\ y &= t-2 \\ z &= 6t+3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -t-3 \\ z &= t+2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 3t-3 \\ z &= 4 \end{cases}$

Exercice 23. ⚽

## 3 Droites sécantes.

Exercice 24.

Déterminez si les droites suivantes de $\mathscr{E}_3$ rapporté à un repère, sont sécantes.

a) $\Delta_1$ qui passe par $A_1(1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\Delta_2$ qui passe par $A_2(-1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}$

b) $\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & -2t-3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$ et $\Delta_2 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & 2t \\ y & = & 3t-3 \\ z & = & 4+1 \end{array}\right.$

## 4 Droites parallèles.

Exercice 25.

Déterminez les droites parallèles parmi

$\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & 3t+1 \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & -t+1 \end{array}\right.$ , $\Delta_2 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & 2t-17 \\ y & = & -5t+7 \\ z & = & t+45 \end{array}\right.$ , $\Delta_3 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & 4t+24 \\ y & = & -10t-3 \\ z & = & 2t-\pi \end{array}\right.$ , $\Delta_4 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & 3t+12 \\ y & = & 2t-18 \\ z & = & -t+34 \end{array}\right.$ , $\Delta_5 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & -6t+1 \\ y & = & -4t-3 \\ z & = & 2t+1 \end{array}\right.$ .

Exercice 26.

Soient $\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lll} x & = & 7t-2 \\ y & = & -2t+3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$ une droite et $A(1{,}0{,}1)$ un point.

Déterminez une représentation paramétrique de la droite $\Delta_2$ parallèle à $\Delta_1$ et passant par $A$.

Exercice 27. ⚽

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

L'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

On appelle $I$ et $J$ les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$.

Soient $E$ et $F$ les points définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Déterminez les coordonnées des points $I$, $J$, $E$ et $F$.
2. Démontrez que $(EF)$ est parallèle à $(IJ)$.

Exercice 28.

1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ où $A(1,-1{,}3)$ et $B(3{,}2{,}4)$.
2. On considère le point $E(-5{,}7{,}1)$.
   Déterminez une représentation paramétrique de la droite $d$ contenant $E$ et parallèle à $(AB)$.
3. On considère le point $F(-1{,}13{,}3)$.
   (a) Justifiez que $(AF)$ et $d$ ne sont pas parallèles.
   (b) Déterminez les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

## 5 Droites coplanaires.

## 6 Droites non coplanaires.

Exercice 29.

Exercice 30.

Soient $d$ et $d'$ deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} -2t+3 \\ y = -3t+1 \\ z = t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$d' : \begin{cases} t'-1 \\ y = -2t' \\ z = 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Pour chaque droite donnez un point et un vecteur directeur.
2. Les droites $d$ et $d'$ sont-elles parallèles ? sécantes ?
3. Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 31.

Dans chaque cas étudiez la position relative des droites $d$ et $d'$.

$$d : \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1.

Exercice 32.

### Exercice 33.

### Exercice 34.

### Exercice 35.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite $\Delta$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 4-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\Delta$ ?

   **Réponse A :** M(2 ; 1 ; −1) ;
   **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
   **Réponse C :** P(−3 ; −4 ; 2) ;
   **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

   **Réponse A :** $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;
   **Réponse B :** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;
   **Réponse C :** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   **Réponse D :** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   **Réponse A :** $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
   **Réponse B :** $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
   **Réponse C :** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
   **Réponse D :** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

   **Réponse A :** $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ;
   **Réponse B :** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ;
   **Réponse C :** D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ;
   **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

# III Plans de l'espace.

## 1 Définition.

## 2 Position relative d'une droite et d'un plan.

Exercice 36.

Soit $d$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = \frac{1}{2}t + 6 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1. Donnez un vecteur directeur de $d$.
2. Soit $\mathscr{P}$ un plan dont un repère est $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(-1,2,5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}$.
   (a) Le point $E(1,1,1)$ appartient-il à ce plan ?
   (b) La droite $d$ est-elle parallèle à $\mathscr{P}$ ? Justifier.
   (c) Déterminez une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ contenant $E$, de vecteur directeur $\vec{u}$.
   Que peut-on dire de $\Delta$ et de $\mathscr{P}$ ?

Exercice 37.

## 3 Plans parallèles.

## 4 Plans sécants.