Vecteurs, droites et plans de l'espace.

L'espace correspond à l'environnement physique qui nous entour.

Nous le percevons visuellement. Cependant lorsqu'on ferme un œil notre vision ne distingue plus la notion de profondeur. Nous voyons alors en deux dimensions comme sur un écran.

La plupart des résultats de géométrie en deux dimensions se généralisent en trois dimensions. Nous allons l'étudier en détaillant les différences.

Nous noterons $\mathscr{E}_3$ l'espace affine (formé de tous les points) de dimension 3.

I Vecteurs de l'espace.

1 Généralisations.

Nous définirons un *vecteur $\vec{u}$* comme le déplacement associé à une translation t. Nous dirons que t est *la translation de vecteur $\vec{u}$* et nous noterons $t_{\vec{u}}$.

Le vecteur associé à une absence de déplacement est appelé le *vecteur nul* et est noté $\vec{0}$.

Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous définissons

— la *norme du vecteur* par : $||\vec{u}|| = MN$ (si le repère est orthonormé voyez après),

— la *direction du vecteur* qui est la droite (MN),

— le *sens du vecteur $\vec{u}$* : de M vers N.

Définition 1

Soient :

. t une translation de $\mathscr{E}_3$ de vecteur $\vec{u}$,

. M et N deux points de $\mathscr{E}_3$.

Si $t(M) = N$, alors nous dirons que $\overrightarrow{MN}$ est *un représentant du vecteur $\vec{u}$* correspondant à la translation qui transforme M en N.

Définition 2

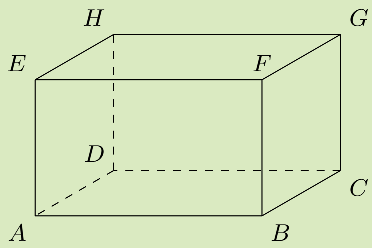
Soient :

. A, B, M et N des points de $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que les représentants *$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux* si et seulement si il existe une translation t (de vecteur $\vec{u}$) telle que $t(M) = N$ et $t(A) = B$.

Exercice 1.

On considère le parallélépipède rectangle (pavé droit) suivant :



Donnez sans justification d'autres représentants des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$. b) $\overrightarrow{EF}$. c) $\overrightarrow{CA}$. d) $\overrightarrow{AE}$.

e) $\overrightarrow{CF}$. f) $\overrightarrow{FB}$. g) $\overrightarrow{CG}$. h) $\overrightarrow{CD}$.

i) $\overrightarrow{CH}$. j) $\overrightarrow{BH}$. k) $\overrightarrow{GD}$. l) $\overrightarrow{GH}$.

m) $\overrightarrow{DB}$. n) $\overrightarrow{HF}$. o) $\overrightarrow{DF}$. p) $\overrightarrow{DE}$.

q) $\overrightarrow{BG}$. r) $\overrightarrow{AF}$. s) $\overrightarrow{BE}$. t) $\overrightarrow{HD}$.

u) $\overrightarrow{HB}$. v) $\overrightarrow{AH}$. w) $\overrightarrow{GA}$. x) $\overrightarrow{AD}$.

y) $\overrightarrow{CB}$.

Proposition 1

Deux représentants $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'un vecteur $\vec{u}$ sont égaux si et seulement si $ABNM$ est un parallélogramme.

Démonstration

Difficile sans définition de la translation...

■

2 Somme de vecteurs.

Définition 3

Soient :

. t_1 et t_2 deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{w}$,

. M et N deux points de l'espace $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que N est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{w}$ si

$$t_2 \circ t_1(M) = t_2\left[t_1(M)\right] = N.$$

Remarques.

1. Ceci signifie notamment que $\vec{u} + \vec{w}$ est aussi un vecteur.
2. Nous voyons que l'addition de vecteur "correspond" à la composition de translations en tant que fonctions.

3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Définition 4

Soient :

. $\lambda \in \mathbb{R}$,

. $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$.

Nous appellerons *produit de $\vec{u}$ par (le scalaire) λ* le vecteur noté $\lambda \cdot \vec{u}$ (ou $\lambda\vec{u}$) défini par :

(i) $||\lambda \cdot \vec{u}|| = |\lambda| \times ||\vec{u}||$.

(ii) $\lambda \cdot \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.

(iii) $\lambda \cdot \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont
- de même sens si $\lambda \geqslant 0$,
- de sens contraire si $\lambda < 0$.

Exemples.

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{E}_3$ alors $||2 \cdot \vec{u}|| = 2||\vec{u}||$, $\vec{u}$ et $2 \cdot \vec{u}$ ont même direction et même sens.
2. Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{E}_3$ alors $\left\|-\frac{1}{3} \cdot \vec{u}\right\| = \frac{1}{3}||\vec{u}||$, $\vec{u}$ et $-\frac{1}{3} \cdot \vec{u}$ ont même direction et sens contraire.
3. En particulier, pour $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$, $\vec{u}$ et $-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ ont mêmes norme et direction mais sont de sens contraire.
   Ainsi : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. Nous dirons que $-\vec{u}$ est *l'opposé* de $\vec{u}$.

4. Si, pour $(A,B,I) \in \mathscr{E}_3^3$, on a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, alors I est le milieu de $[AB]$.

Remarques.

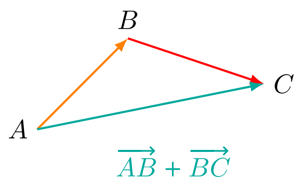
1. La multiplication par un scalaire est une opération qui n'est définie qu'à droite. On n'écrira pas : $\overrightarrow{AB} \cdot 2$ mais bien $2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

4 Les propriétés.

Proposition 2 - Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

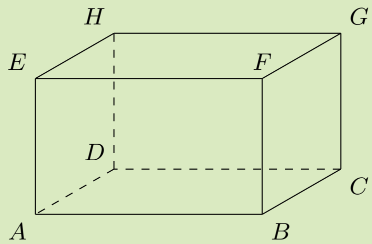


Remarques.

1. Pour dessiner le représentant de la somme il faut choisir deux représentants des vecteurs qui « se suivent » : l'extrémité d'un représentant est l'origine de l'autre représentant à sommer.
2. Nous utiliserons aussi cette relation pour « calculer » avec des vecteurs, *i.e.* essentiellement pour simplifier les expressions.
   $-\vec{u}$ a le même sens et la même direction que $\vec{u}$ mais est de sens contraire.
3. Il faut imaginer cette relation en trois dimensions comme dans l'exercice qui suit.

Exercice 2.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :



Exprimez les sommes de vecteurs suivantes sous forme d'un seul représentant faisant intervenir uniquement les points de la figure.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$.

b) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}$.

c) $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{HG}$.

e) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EA}$.

f) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GF}$.

Exercice 3.

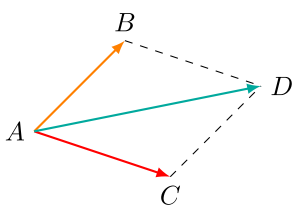
Démontrez.

1. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$.
2. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.
3. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
5. $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

Proposition 3 - Identité du parallélogramme.

Soient A, B, C et D des points d'un même plan.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



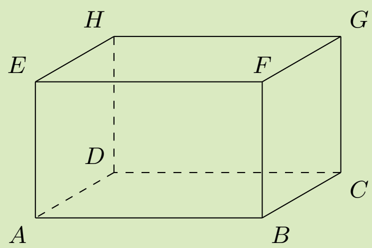
Remarques.

1. Nous utiliserons ce résultat pour dessiner le vecteur somme lorsque les représentants additionnés ont la même origine.

2. Cette identité est plus rarement utilisée dans les calculs que la relation de Chasles.
3. Il faut imaginer cette relation en trois dimensions comme dans l'exercice qui suit.

Exercice 4.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :



Simplifiez les sommes suivantes sous forme d'un seul représentant.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FH}$.

c) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}$.

d) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH}$.

e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$.

f) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GE}$

g) $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{AB}$.

h) $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FH}$

Proposition 4

Soient :

. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathscr{E}_3$,

. λ et μ des réels.

Les propriétés suivantes sont vraies.

(i) $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$.

(ii) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

(iii) $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

(iv) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

(v) $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$.

(vi) $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\mu+\mu\cdot\vec{v}$.

(vii) $(\lambda\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$.

(viii) $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$.

Démonstration

Là encore pas de preuve sans définition des translations. Cependant il est possible de vérifier sur des représentants.

■

Exemples.

Remarques.

1. Ces propriétés ne doivent pas être apprises par cœur : il faut simplement retenir que l'on retrouve les loi habituelles qui régissent l'addition et a multiplication des réels.
2. La propriété (i) signifie que $\vec{0}$ est un neutre pour l'addition.
3. La propriété (ii) signifie que l'addition de vecteurs est associative. L'écriture de parenthèses, lorsqu'il ny a que des additions, n'est pas indispensable.
4. La propriété (iii) signifie que tout vecteur est inversible pour l'addition (existence d'un opposé).
5. Les propriétés (i), (ii) et (iii) combinées montrent que l'ensemble de tous les vecteurs du plan muni de l'addition forme un groupe.
6. La propriété montre que l'addition est commutative. L'ensemble des vecteurs de l'espace forme un groupe abélien.
7. Toutes les propriétés réunies forment la définition général d'un espace vectoriel.

5 Colinéarité.

Définition 5

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que

$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$

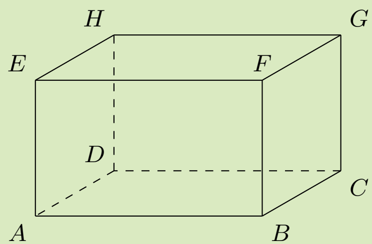
Remarques.

1. Nous pouvons voir la chose comme une sorte de rapport de proportionnalité entre les vecteurs.
2. Il suffit d'établir l'une des deux égalités pour établir la colinéarité de deux vecteurs.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

4. L'expression « colinéarité » signifie que les vecteurs représenterons la même « ligne », c'est-à-dire la même droite. Nous reverrons cela en disant que deux vecteurs colinéaires sont des vecteurs directeurs des mêmes droites.
5. Des vecteur qui ne sont pas colinéaires seront dit *linéairement indépendants* : ils ne dessinent pas les mêmes lignes, la même direction.
6. Sens, direction et norme...

Exercice 5.

On considère le parallélépipède rectangle suivant :



Dites, sans justifier, si, dans les cas suivants, les deux vecteurs proposés sont linéairement indépendants ou colinéaires.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FH}$.
c) $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HG}$.
d) $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EH}$.
e) $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GH}$.
f) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BG}$.
g) $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{FA}$.
h) $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
i) $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{GC}$.

6 Combinaisons linéaires.

Pour l'étude des vecteurs la combinaison linéaire est un outil fondamental. À tel point que le domaine étudiant les vecteurs est appelé l'algèbre linéaire.

Définition 6

Soient :

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}_3$,

. λ et μ des réels.

Nous appellerons *combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$* tout vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$.

Exemples.

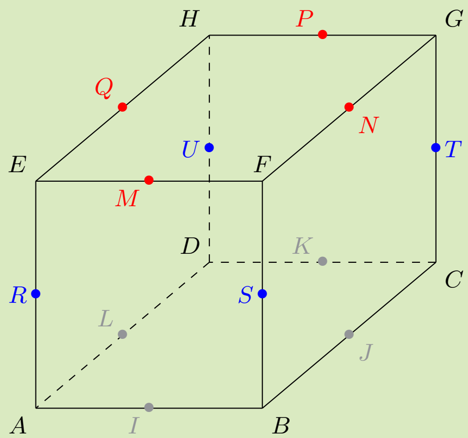
1. $3 \cdot \vec{u} - 4 \cdot \vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $-\frac{1}{13} \cdot \vec{u} + \sqrt{3} \cdot \vec{v} + 0{,}8 \cdot \vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Pour $(A,B,C,D) \in \mathscr{E}_3^4$, $\overrightarrow{AB} - 6 \cdot \overrightarrow{CD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Exercice 6.

Établissez une relation de colinéarité entre les représentant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sachant que

Exercice 7.

On a dessinée ci-dessous le cube $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.



1. Exprimez les combinaisons linéaires suivantes sous forme d'un seul représentant.

   a) $2 \cdot \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{FD}$.
   b) $4 \cdot \overrightarrow{LK} + 2 \cdot \overrightarrow{CA}$.
   c) $2 \cdot \overrightarrow{DM} + 2 \cdot \overrightarrow{QH} + 2 \cdot \overrightarrow{NK}$.
   d) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HF}$.

2. Proposez une combinaison linéaire

   a) de $\overrightarrow{RM}$ et de $\overrightarrow{NP}$ qui égale $\overrightarrow{BD}$.
   b) de $\overrightarrow{HU}$ et $\overrightarrow{DB}$ qui égale $\overrightarrow{FD}$.

Proposition 5

Soient :

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{E}_3$,

. $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire telle que $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \vec{0}$ et λ et μ ne sont pas tous les deux nuls.

Démonstration

Par condition nécessaire et suffisante en distinguant les cas λ ou μ nul.

■

Remarques.

1. Cette caractérisation de la colinéarité a l'avantage de ne pas contenir les deux possibilités de la définition (« ou »).

Exemples.

1.

7 Vecteurs linéairement indépendants et base.

La précédente proposition suggère un procédé de généralisation de la notion de colinéarité à plus de deux vecteurs.

Nous dirons que des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont *liés* s'il est possible de trouver une combinaison linéaire $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$ avec les λ_1, λ_2 et λ_3 non tous nuls.

Cependant nous préférerons la notion contraire qui est celle de *liberté*.

Définition 7

Soient :

. $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

. $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ des vecteurs de $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont *linéairement indépendants* (ou *libres*) lorsque, pour que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$, il faut forcément que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemples.

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}$ ne sont pas linéairement indépendants puisque, par exemple : $2 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ ne sont pas linéairement indépendants car : $1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w} = \vec{0}$.
3. Si $ABCDEFGH$ est un cube non réduit à un point alors (et nous l'admettrons pour l'instant) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

Remarques.

1. Nous retrouvons ici une généralisation des notions de vecteurs linéairement indépendants.
2. lorsque trois vecteurs de l'espace ne sont pas linéairement indépendant nous dirons qu'ils sont *coplanaire*.

Rappelons que nous avions défini une base du plan affine $\mathscr{E}_2$ comme un couple de vecteurs linéairement indépendants (non colinéaires).

Définition 8

Soient :

. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}_3$.

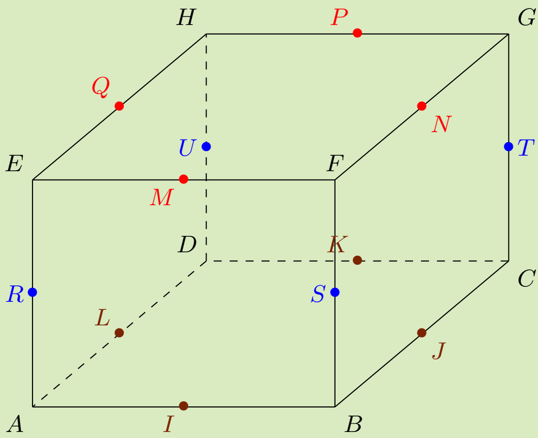
Nous dirons que le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une *base* de $\mathscr{E}_3$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

Exemples.

1. Pour un cube $ABCDEFGH$ non réduit à un point $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est une base de $\mathscr{E}_3$.

Exercice 8.

On a dessinée ci-dessous le cube $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Proposez dix bases différentes de $\mathscr{E}_3$ en utilisant des représentants dont les extrémités apparaissent dans la figure ci-dessus.

8 Coordonnées.

Théorème 1 et définition.

Soient :

. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{E}_3$,

. $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$.

Il existe un unique triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Nous dirons que (x,y,z) sont *les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$*.

Démonstration

Si

$$x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}$$

alors

$$(x - x') \cdot \vec{i} + (y - y') \cdot \vec{j} + (z - z') \cdot \vec{k} = \vec{0}.$$

Or les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont libres car formant une base et donc

$$\left\{\begin{array}{c} x = x' \\ y = y' \; z = z' \end{array}\right.$$

■

Remarques.

1. Autrement dit pour trouver les coordonnées d'un vecteur il suffit de l'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Proposition 6 - coordonnées affines et vectorielles.

Soient :

. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{E}_3$,

. I, J et K les images respective de O dans les translations de vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$,

. A un point de coordonnées (x_A,y_A,z_A) dans (O,I,J,K),

. B un point de coordonnées (x_B,y_B,z_B) dans (O,I,J,K).

Les coordonnées du représentant $\overrightarrow{AB}$ sont données par

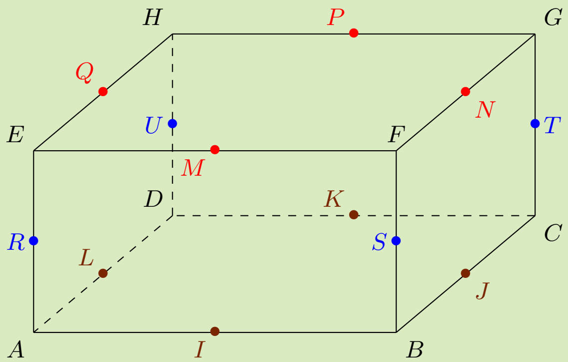
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Remarques.

1. Le repère (affine) (O,I,J,K) sera aussi noté $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Exercice 9.

On a dessinée ci-dessous un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteurs dans la base proposée.

a) $\overrightarrow{AG}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HG}\right)$.

c) $\overrightarrow{DH}$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF}\right)$.

d) $\overrightarrow{AN}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

e) $\overrightarrow{QM}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

f) $\overrightarrow{PJ}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

À partir de la définition des coordonnées il est aisé de vérifier les propriétés données dans la proposition suivante.

Proposition 7

Soient :

. $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace $\mathscr{E}_3$,

. $\lambda \in \mathbb{R}$,

. $\vec{u}(x,y,z)$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathscr{B}$,

. $\vec{v}(r,s,t)$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathscr{B}$.

On a :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+r \\ y+s \\ z+t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\cdot\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda\times x \\ \lambda\times y \\ \lambda\times z \end{pmatrix}.$$

Remarques.

1. Ce résultat explique que nous préférions noter les coordonnées des vecteurs en

colonnes : on additionne et on multiplie en suivant les lignes des coordonnées présentées en colonnes.

Nous pourrions (mais nous ne le ferons pas car c'est une approche différente de la question) définir l'addition des coordonnées :

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4\\2+5\\3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}.$$

Exercice 10. ☯

Dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-57\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\1\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi^3}\\\sqrt{\pi}\\\pi\end{pmatrix}$.

Exercice 11. ☯

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 12. ☯

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 13.

Soient $A(1{,}2{,}3)$, $B(2{,}0{,}3)$, et $C(6{,}3{,}8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas liés.
2. Déterminez α, β et γ tels que :
$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$
3. Déterminez α', β' et γ' tels que :
$$\overrightarrow{BC} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}.$$
4. Déduisez-en les coordonnées du point C dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 14.

On considère les points $A(1{,}2{,}3)$, $B(-1{,}1{,}4)$ et $C(3{,}5,-2)$ dans un repère (O,I,J,K). Déterminez les coordonnées du point D telles ue $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 15.

On considère les points $A(1{,}2{,}1)$, $B(3,-1{,}2)$ et $C(-1{,}3{,}4)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Déterminez les coordonnées du milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 16.

Soient les points $A(-1{,}4,-3)$ et $B(2{,}1{,}3)$ dans un repère (O,I,J,K).
Déterminez les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 17.

On considère les points $A(0{,}1{,}1)$, $B(2{,}1{,}1)$, $C(3{,}1{,}1)$ et $D(1{,}1{,}1)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2{,}2{,}4)$.
   Déterminez les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soient J le milieu de $[EF]$ et I le point tel que F soit le milieu de $[AI]$.
   Démontrez que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 18.

Soient $A(1{,}2{,}1)$, $B(1,-1{,}1)$ et $C(3{,}1{,}2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $(E(3{,}7{,}2)$. déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$.
   Les points G, J et F sont-ils alignés ?

Exercice 19.

Soient $A(3,-2,-4)$, $B(4,-3,-2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils liés ?

Exercice 20.

Soient $A(2{,}4,-1)$, $B(3{,}1{,}2)$, $C(1{,}0{,}1)$, $D(3{,}2{,}1)$ et $E(1{,}2{,}0)$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas liés.
2. Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Où se situe le point M ?
4. Déterminez α, β, γ tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}.$$

   Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$?

II Droites de l'espace.

1 Définition.

Bien qu'une droite soit un ensemble de points la définition de la droite utilise les vecteurs.

Ce sont les vecteurs, les translations, qui relient entre-eux les points de la droite.

Rappelons qu'une droite est entièrement définie par la donnée de deux points distincts.

Définition 9

Soient :

. A et B deux points distincts de l'espace affine $\mathscr{E}_3$.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. La définition ci-dessus donne ce que l'on nomme un lieu géométrique : un procédé pour décrire la droite.
   Nous en utiliserons un autre qui sera souvent plus pratique : la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que :
   $$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$
   où λ parcours l'ensemble des réels.
   Avec une notation ensembliste et le quantificateur existentiel $\exists$ on peut écrire :
   $$(AB) = \left\{M \in \mathscr{E}_3 \mid \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}\right\}.$$
2. $\overrightarrow{AB}$ représente un vecteur $\vec{u}$ que nous appellerons un *vecteur directeur* de (AB).
   De façon plus générale nous appellerons vecteur directeur de la droite (AB) tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
3. On remarque qu'*une droite est entièrement caractérisée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur*. Autrement dit pour parler d'une droite on peut en donner deux points distincts (A et B) ou en donner un point (A) et un vecteur directeur ($\vec{u}$).

2 Représentation paramétrique d'une droite.

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace rapporté à repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Dire que $M(x,y,z) \in \mathscr{D}$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et colinéaire à $\vec{u}$.
Autrement dit, puisque $\vec{u} \neq 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

En considérant les coordonnées nous obtenons donc

$$\left\{\begin{array}{r} x-1=t\times 2 \\ y+2=t\times 1 \\ z-3=t\times -1 \end{array}\right.$$

Ainsi dire que $M \in \mathscr{D}$ signifie qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de M sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+1 \\ y & = & t-2 \\ z & = & -t+3 \end{array}\right.$$

Formellement c'est comme si nous avions $M = t\vec{u} + A$.

Proposition 8 et définition.

Soient :

. $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

. $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace,

. $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at+x_A \\ y & = & bt+y_A \\ z & = & ct+z_A \end{array}\right.$$

Nous dirons alors que ce système d'équation est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. En physique nous utiliserons une notation fonctionnelle pour indiquer la dépendance de x à t : $x(t) = at + x_A$.
   D'ailleurs si $x(t)$ représente l'abscisses d'un point M, t sera souvent le temps.
2. Chaque vecteur directeur de la droite donne une nouvelle représentation paramétrique : il y a donc une infinité de représentations paramétriques d'une droite.
3. Formellement (il ne faut pas l'écrire comme ceci) la représentation paramétrique correspond à : $M = \vec{u}t + A$.

4. Il n'est pas forcément étonnant que la représentation paramétrique d'une droite fasse apparaître des fonctions affines.

Exemples.

1.
2.
3.

Exercice 21. ⚽

Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,

b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,

c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

d) $A(100;2{,}4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times 10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,

f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,

g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,

h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,

i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,

j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,

k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,

l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

Exercice 22. ⚽

Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les équation paramétriques sont données :

a) $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -4t+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -2t+2 \\ y = t-2 \\ z = 6t+3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t-3 \\ z = t+2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t-3 \\ z = 4 \end{cases}$

Exercice 23. ⚽

3 Droites sécantes.

Définition 10

Deux droites de l'espace sont dites sécantes si leur intersection est réduite à un point.

Exemples.

1.
2.
3.

Exercice 24.

Déterminez si les droites suivantes de $\mathscr{E}_3$ rapporté à un repère, sont sécantes.

a) Δ_1 qui passe par $A_1(1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et Δ_2 qui passe par $A_2(-1{,}3{,}4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}$

b) $\Delta_1 : \left\{\begin{array}{ccc} x & = & t \\ y & = & -2t-3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$ et $\Delta_2 : \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2t \\ y & = & 3t-3 \\ z & = & 4+1 \end{array}\right.$

4 Droites parallèles.

Définition 11

Deux droites de l'espace sont dites parallèles si au moins un vecteur directeur de l'une est colinéaire à au moins un vecteur directeur de l'autre.

Exemples.

1.
2.

Remarques.

1. Si les deux vecteurs directeurs sont effectivement colinéaires alors tous les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires entre eux.

2. Le parallélisme inclus le cas des droites confondues.

Exercice 25.

Déterminez les droites parallèles parmi

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -t+1 \end{cases}, \Delta_2 : \begin{cases} x = 2t-17 \\ y = -5t+7 \\ z = t+45 \end{cases}, \Delta_3 : \begin{cases} x = 4t+24 \\ y = -10t-3 \\ z = 2t-\pi \end{cases}, \Delta_4 : \begin{cases} x = 3t+12 \\ y = 2t-18 \\ z = -t+34 \end{cases}, \Delta_5 : \begin{cases} x = -6t+1 \\ y = -4t-3 \\ z = 2t+1 \end{cases}.$$

Exercice 26.

Soient $\Delta_1 : \begin{cases} x = 7t-2 \\ y = -2t+3 \\ z = t+1 \end{cases}$ une droite et $A(1{,}0{,}1)$ un point.

Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ_2 parallèle à Δ_1 et passant par A.

Exercice 27.

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
L'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.
On appelle I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$.
Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Déterminez les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrez que (EF) est parallèle à (IJ).

Exercice 28.

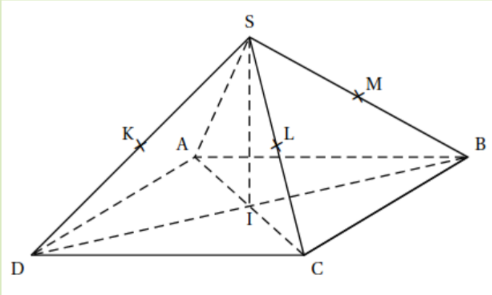
1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1,-1{,}3)$ et $B(3{,}2{,}4)$.
2. On considère le point $E(-5{,}7{,}1)$.
   Déterminez une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB).
3. On considère le point $F(-1{,}13{,}3)$.
   (a) Justifiez que (AF) et d ne sont pas parallèles.
   (b) Déterminez les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

5 Droites coplanaires.

Définition 12

Deux droites de l'espace sont dites coplanaires si elles sont sécantes ou parallèles.

Exercice 29.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I} ;\ \overrightarrow{\text{IC}}, \overrightarrow{\text{IB}}, \overrightarrow{\text{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0 ;\ 0 ;\ 0) ;\ \text{A}(-1 ;\ 0 ;\ 0) ;\ \text{B}(0 ;\ 1 ;\ 0) ;\ \text{C}(1 ;\ 0 ;\ 0) ;\text{D}(0 ;\ -1 ;\ 0) ;\ \text{S}(0 ;\ 0 ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

   a. $\left(\frac{1}{4} ;\ \frac{1}{4} ;\ \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ;\ -\frac{1}{4} ;\ \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ;\ \frac{1}{4} ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ;\ \frac{1}{2} ;\ 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

   a. $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1-t \\ y & = & t \\ z & = & -t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1+2t \\ y & = & 0 \\ z & = & 1+2t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 1+t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1-t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

6 Droites non coplanaires.

Des droites sont dites non coplanaires si elles ne sont pas coplanaires.

Proposition 9

Deux droites sont non coplanaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et si leur intersection est vide.

Exercice 30.

Exercice 31.

Soient d et d' deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} -2t+3 \\ y=-3t+1 \\ z=t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$d' : \begin{cases} t'-1 \\ y=-2t' \\ z=4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Pour chaque droite donnez un point et un vecteur directeur.
2. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? sécantes ?
3. Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 32.

Dans chaque cas étudiez la position relative des droites d et d'.

$$d : \begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1.

Exercice 33.

Exercice 34.

Exercice 35.

Exercice 36.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ; **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
   Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ; **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

   Réponse A : $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

   Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2 \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\left\{\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$

   Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$

4. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

   Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

   Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

III Plans de l'espace.

1 Définition.

Définition 13

Soient :

. A, B et C trois points distincts deux à deux et non alignés de l'espace affine $\mathscr{E}_3$.

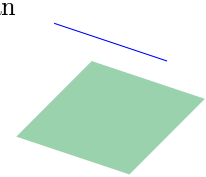
Nous noterons (ABC), et nous appellerons *plan passant par A, B et C*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarques.

1. Autrement dit :
$$(AB) = \left\{M \in \mathscr{E}_3 \mid \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}\right\}.$$
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ jouent, pour les plans, le même rôle que le vecteur directeur pour la droite. Ils indiquent *la direction* du plan. La direction du plan est l'ensemble des tous les vecteurs qui peuvent être obtenus comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Dire que A, B et C sont trois points distincts deux à deux et non alignés équivaut à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Autrement dit $\left(A; \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC).
4. On remarque qu'*un plan est entièrement caractérisé par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires de sa direction*. Autrement dit pour parler d'une plan on peut en donner trois points distincts non alignés (A, B et C) ou en donner un point (A) et deux vecteurs non colinéaires de sa direction ($\vec{u}$ et $\vec{v}$).
5. Comme pour les droites il existe une représentation paramétrique mais celle-ci fait intervenir deux paramètres. S'il peut arriver que nous la rencontrions nous n'en ferons pas un grand usage.

2 Position relative d'une droite et d'un plan.

Nous aurons trois situations possibles :
— la droite est parallèle au plan



— la droite est incluse dans le plan
— la droite et le plan sont sécants.

Hormis pour l'inclusion qui est déjà définie (il s'agit de l'inclusion d'ensembles : tout point de la droite appartient au plan) nous allons définir ces situations.

Définition 14

Une droite et un plan de l'espace sont sécants si et seulement si leur intersection est réduite à un point.

Exemples.

1.

Définition 15

Une droite et un plan de l'espace sont parallèles si au moins un vecteur directeur de la droite est colinéaire à au moins un vecteur de la direction du plan.

Remarques.

1. Autrement dit il faut et il suffit qu'un vecteur directeur (de la droite) soit une combinaison linéaire des vecteurs d'une base du plan.

Exemples.

1.

Exercice 37.

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -t+1 \\ y = 4t-3 \\ z = \frac{1}{2}t+6 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

1. Donnez un vecteur directeur de d.
2. Soit $\mathscr{P}$ un plan dont un repère est $(A;\vec{u},\vec{v})$ avec $A(-1{,}2{,}5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}$.
   (a) Le point $E(1{,}1{,}1)$ appartient-il à ce plan ?
   (b) La droite d est-elle parallèle à $\mathscr{P}$? Justifier.
   (c) Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ contenant E, de vecteur directeur $\vec{u}$.
   Que peut-on dire de Δ et de $\mathscr{P}$?

Exercice 38.

Exercice 39.

3 Plans parallèles.

4 Plans sécants.