Vecteurs de l'espace, combinaisons linéaires, bases.

Espace vectoriel euclidien.

Comme dans le plan nous pouvons définir des vecteurs comme le déplacement associé à une translation mais dans un espace à trois dimensions. Comme trois points sont toujours contenus dans un plan un grand nombre de résultats du plan se retrouvent dans l'espace.

Définition 1. On appelle *espace vectoriel euclidien* et on note $\vec{\mathscr{E}}$ l'ensemble formé de tous les vecteurs de l'espace.

Remarques.

1. On retrouve dans cet espace les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre réel (appelé scalaire).
2. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$.
3. On retrouve également la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
4. L'identité du parallélogramme : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
5. La notion de colinéarité est toujours valable.

Combinaisons linéaires.

Définition 2. Soients $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $()\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \in \vec{\mathscr{E}}^n$. Le vecteur $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{n}$ est appelé une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v_1}$, ..., $\vec{v}_n$.

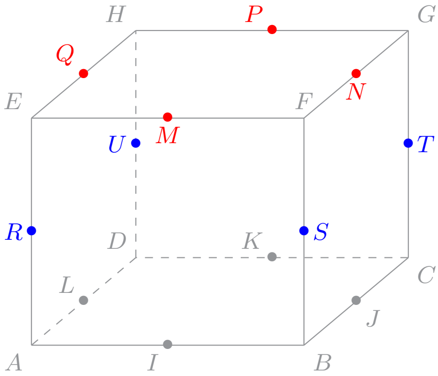
Exemples.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs alors $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $4\vec{i} - \frac{1}{5}\vec{j} + \pi\vec{k}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
3. $4\vec{i}$ est aussi une combinaison linéaire (avec un unique vecteur).
4. $\vec{0}$ est aussi une combinaison linéaire.

Remarques.

1. La définition de combinaison linéaire est valable pour les vecteurs du plan.
2. La combinaison linéaire est le calcul fondamental pour l'étude des vecteurs.

Dans les exercices lorsqu'on parle d'un parallélépipède rectangle, ou un cube, $ABCDEFGH$ vous pourrez raisonner sur la figure suivante. Les points qui ne sont pas de sommets les milieux des arêtes.



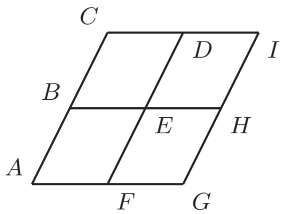
On attend des élèves qu'ils soient capables de lire des informations vectorielles sur une figure en perspective cavalière.

EXERCICE 1. Démontrez les égalités de vecteurs de l'espace.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

Exercice 1. Avec la relation de Chasles.

EXERCICE 2. On considère la figure plane suivante.



Donnez un autre représentant de chacun des vecteurs proposés.

a) $\overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{DF}$.
c) $\overrightarrow{GH}$.
d) $\overrightarrow{DC}$.
e) $\overrightarrow{BH}$.
f) $\overrightarrow{DH}$.
g) $\overrightarrow{FC}$.
h) $\overrightarrow{HA}$.
i) $\overrightarrow{IE}$.

Exercice 2.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HI}$.
b) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA}$.
c) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{ED}$.
d) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HE}$.
e) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AG}$.
f) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$.
g) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{GD}$.
h) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{IB}$.
i) $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{DB}$.

EXERCICE 3. On considère un parallélépipède rectangle (pavé droit) $ABCDEFGH$. Donnez, sans justification, d'autres représentants des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{CA}$.
c) $\overrightarrow{AE}$.
d) $\overrightarrow{CF}$.
e) $\overrightarrow{FB}$.
f) $\overrightarrow{CG}$.
g) $\overrightarrow{CD}$.
h) $\overrightarrow{CH}$.
i) $\overrightarrow{BH}$.
j) $\overrightarrow{GD}$.
k) $\overrightarrow{GH}$.
l) $\overrightarrow{DB}$.
m) $\overrightarrow{HF}$.
n) $\overrightarrow{EF}$.
o) $\overrightarrow{DF}$.
p) $\overrightarrow{DE}$.
q) $\overrightarrow{BG}$.
r) $\overrightarrow{AF}$.
s) $\overrightarrow{BE}$.
t) $\overrightarrow{HD}$.
u) $\overrightarrow{HB}$.
v) $\overrightarrow{AH}$.
w) $\overrightarrow{GA}$.
x) $\overrightarrow{AD}$.
y) $\overrightarrow{CB}$.

Exercice 3.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.
b) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE}$.
c) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$.
d) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$.
e) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$.
f) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.
g) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
h) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$.
i) $\overrightarrow{BH}$ =?.
j) $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA}$.
k) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$.
l) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HF}$.
m) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB}$.
n) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
o) $\overrightarrow{DF}$ =?.
p) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.
q) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$.
r) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$.
s) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$.
t) $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FB}$.
u) $\overrightarrow{HB}$ =?.
v) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$.
w) $\overrightarrow{GA}$ =?.
x) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
y) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

EXERCICE 4. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Exprimez les sommes de vecteurs suivantes sous forme d'un seul représentant faisant intervenir uniquement les points de la figure.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$. b) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}$. c) $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{CD}$.
d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{HG}$. e) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EA}$. f) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GF}$.

Exercice 4.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.
b) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AH}$.
c) $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CF}$.
d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AF}$.
e) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EA}=?$.
f) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{AD}$.

EXERCICE 5. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Simplifiez les sommes suivantes sous forme d'un seul représentant. *Vous pourrez utiliser l'identité du parallélogramme.*

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. b) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FH}$. c) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}$. d) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH}$. e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$.
f) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GE}$ g) $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{AB}$. h) $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FH}$

Exercice 5.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
b) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FH}=2\overrightarrow{FQ}$.
c) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DG}$.
d) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GD}$.
e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AG}$.
f) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GA}$
g) $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$.
h) $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FD}$

EXERCICE 6. On considère un cube $ABCDEFGH$. Simplifiez la combinaison linéaire sous forme d'un unique représentant. *Exemple :* $-2\cdot\overrightarrow{QM}+1\cdot\overrightarrow{EF}+1\cdot\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{MK}$.

a) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{NQ}$.
b) $\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{TP}$.
c) $3\cdot\overrightarrow{DL}+2\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RQ}$.
d) $\overrightarrow{CB}+2\cdot\overrightarrow{UP}$.
e) $\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AE}$.
f) $2\cdot\overrightarrow{HQ}+2\cdot\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{FD}$.
g) $\overrightarrow{DE}-2\cdot\overrightarrow{UH}+\overrightarrow{BG}$.

Exercice 6.

a) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{PQ}$.
b) $\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{DP}$.
c) $3\cdot\overrightarrow{DL}+2\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{DT}$.
d) $\overrightarrow{CB}+2\cdot\overrightarrow{UP}=\overrightarrow{DF}$.
e) $\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{TF}$.
f) $2\cdot\overrightarrow{HQ}+2\cdot\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{HD}$.
g) $\overrightarrow{DE}-2\cdot\overrightarrow{UH}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DE}$.

EXERCICE 7. On considère un cube $ABCDEFGH$. Exprimez le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et éventuellement $\vec{s}$ dans les cas suivants. *Exemple :* $\overrightarrow{AF}=1\cdot\overrightarrow{AB}+1\cdot\overrightarrow{BF}$ *est une expression de* $\vec{u}=\overrightarrow{AF}$ *comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{w}=\overrightarrow{BF}$.

a) $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.
b) $\vec{u}=\overrightarrow{BD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{BA}$.
c) $\vec{u}=\overrightarrow{DG}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$.
d) $\vec{u}=\overrightarrow{FC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{HD}$.
e) $\vec{u}=\overrightarrow{MI}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AI}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{GT}$.
f) $\vec{u}=\overrightarrow{QM}$, $\vec{v}=\overrightarrow{HE}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{EF}$.
g) $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$.
h) $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{s}=\overrightarrow{CD}$.
i) $\vec{u}=\overrightarrow{HF}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{s}=\overrightarrow{AE}$.
j) $\vec{u}=\overrightarrow{AP}$, $\vec{v}=\overrightarrow{IB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{DL}$ et $\vec{s}=\overrightarrow{CT}$.
k) $\vec{u}=\overrightarrow{DS}$, $\vec{v}=\overrightarrow{LR}$, $\vec{w}=\overrightarrow{EH}$ et $\vec{s}=\overrightarrow{AK}$.
l) $\vec{u}=\overrightarrow{PB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{UK}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$ et $\vec{s}=\overrightarrow{HE}$.

Exercice 7.

a) $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.
$\vec{u}=1\vec{v}+1\vec{w}$.

b) $\vec{u}=\overrightarrow{BD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{BA}$.
$\vec{u}=-1\vec{v}+1\vec{w}$.

c) $\vec{u} = \overrightarrow{DG}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.

d) $\vec{u} = \overrightarrow{FC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{HD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.

e) $\vec{u} = \overrightarrow{MI}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{GT}$.
$\vec{u} = 0\vec{v} + 2\vec{w}$.

f) $\vec{u} = \overrightarrow{QM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{HE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.
$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

g) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
Impossible.

h) $\vec{u} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$.

i) $\vec{u} = \overrightarrow{HF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AE}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 1\vec{w} + 0\vec{s}$.

j) $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DL}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CT}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 2\vec{w} + 2\vec{s}$.

k) $\vec{u} = \overrightarrow{DS}$, $\vec{v} = \overrightarrow{KS}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EQ}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AK}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 2\vec{w} + 1\vec{s}$.

l) $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{UK}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{DL}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + 2\vec{s}$.

EXERCICE 8.

Indépendance linéaire.

Définition 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous dirons que des vecteurs $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_n$ de $\vec{\mathscr{E}}$ sont *linéairement indépendants* si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui égale le vecteur nul est obtenue avec des coefficients tous nuls.

Remarques.

1. Autrement dit pour que les vecteurs soient linéairement indépendants il faut que : s'il existe des nombres a_1, .., a_n tels que $a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ alors, forcément, $a_1 = \cdots = a_n = 0$.
2. Cette définition technique signifie que les vecteurs contiennent des directions différentes, qu'aucun des deux (resp. trois) vecteurs ne peut être retiré sans une perte de possibilité de déplacement.

Exemples.

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}$ ne sont pas linéairement indépendants puisque, par exemple : $2 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ ne sont pas linéairement indépendants car : $1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w} = \vec{0}$.
3. Si $ABCDEFGH$ est un cube non réduit à un point alors (et nous l'admettrons pour l'instant) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

Proposition 1. Deux vecteurs ne sont pas linéairement indépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.

Démonstration. Supposons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non linéairement indépendants. S'il existe des réels λ et μ dont l'un au moins est non nul, par exemple λ, et tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

La réciproque est du même tonneau.

Exemples.

1. Soit I le milieu d'un segment $[AB]$. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas linéairement indépendant puisque colinéaires.
2.

Vecteur directeur d'une droite.

Pour des raisons pédagogiques (éviter le cours ne soit trop long et trop décousu) nous admettrons dès maintenant des résultats qui seront vus plus loin dans la leçon : les points et les vecteurs de l'espace admettent trois coordonnées de la même façon que dans les plans il n'en admettent que deux.

Définition 4. Soient A et B deux points de l'espace $\mathscr{E}$. On appelle *droite* (AB) l'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Autrement dit (AB) est l'ensemble des points M tels que : $\exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. On dit que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$, est *une représentation paramétrique vectorielle* de (AB).

Définition 5. Soient $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$ tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$. On appelle droite passant par A et de *vecteur directeur* $\vec{u}$ la droite (AB) où B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$. Le couple $(A;\vec{u})$ est appelé *un repère de la droite* (AB).

Exemples.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace. $(A;\overrightarrow{AB})$ et $(B;-3\overrightarrow{BA})$ sont des repères de la droite (AB).

Proposition 2. Soient $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$ tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Notons $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Si $C \in \mathscr{D}$ alors il existe un unique $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$.

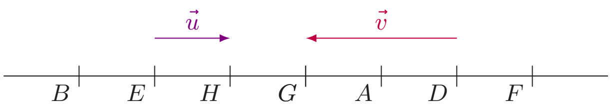
Remarques.

1. k est appelé *l'abscisse de C dans le repère* $(A;\vec{u})$.
2. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est la droite de repère $(A;\vec{u})$; on parle de *représentation paramétrique vectorielle*. De cette égalité entre vecteurs on déduit trois égalités entre les coordonnées : $\begin{cases} x_M = \lambda x_{\vec{u}} + x_A \\ y_M = \lambda y_{\vec{u}} + y_A \\ z_M = \lambda z_{\vec{u}} + z_A \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ qu'on appelle *une représentation paramétrique de la droite* dont un repère est $(A;\vec{u})$. Il est clair que toute droite admet une représentation paramétrique (et la réciproque est également vraie) et que cette représentation paramétrique n'est pas unique.

Exemples.

1. Soient A, B et C trois points de l'espace tels que $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires puisque $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et donc A, B et C sont alignés. De plus l'abscisse de B dans le repère $(A;\overrightarrow{AC})$ est $\frac{3}{2}$. Celle de A dans le même repère est 0. L'abscisse de B dans le repère $(C;\overrightarrow{AB})$ est $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 9.



Donnez sans justification l'abscisse du point dans le repère.

a) B dans $(A;\vec{u})$. b) H dans $(B;\vec{v})$. c) G dans $(D;2\vec{u})$.
d) E dans $(F;2\vec{v})$. e) A dans $(D;2\vec{v})$.

EXERCICE 10. On considère un pavé droit $ABCDEFGH$. Dans chaque cas décrivez par deux points la droite dont on donne un repère. Exemple : la droite dont un repère est $(A;\overrightarrow{AL})$ est la droite (AL).

a) $(A;\overrightarrow{DC})$. b) $(H;\overrightarrow{TJ})$. c) $(M;\overrightarrow{UD})$.
d) $(K;\overrightarrow{BE})$. e) $(A;\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AE})$. f) $(B;\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HD})$.
g) $(S;\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GH})$. h) $(G;\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{TC})$. i) $(I;\overrightarrow{KU}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KP})$.
j) $(G;\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KJ})$. k) $(I;\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CG})$. l) $(F;\overrightarrow{UD}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{BS})$.

Exercice 10.

a) (AB). b) (HA). c) (MI). d) (KU). e) (AM).
f) (BP). g) (SU). h) (TU). i) (IE). j) (GF).
k) (IG). l) (IG).

EXERCICE 11.
EXERCICE 12. Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,
b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,
c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,
d) $A(100;2,4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times 10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,
e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,
f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,
g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,
h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,
i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,
j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,
k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,
l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

EXERCICE 13. Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les représentations paramétriques sont données :

a) $\begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= 2t-3 \\ z &= -4t+2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x &= -2t+2 \\ y &= t-2 \\ z &= 6t+3 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -t-3 \\ z &= t+2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 3t-3 \\ z &= 4 \end{cases}$

EXERCICE 14. Déterminez les points d'intersection des droites d_1 et d_2 dont on donne des représentations paramétriques.

a) $d_1 : \begin{cases} x &= 2t_1+1 \\ y &= t_1+1 \\ z &= -4t_1+2 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x &= 4t_2-5 \\ y &= -t_2+7 \\ z &= -2t_2-4 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}$.

b) $d_1 : \begin{cases} x &= -t_1+2 \\ y &= t_1+3 \\ z &= t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x &= t_2-2 \\ y &= -3t_2+1 \\ z &= t_2+1 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 15. Dans chaque dites si le point A appartient à la droite d.

a) $A(11,-37,15)$ et $d : \begin{cases} x &= 2t+1 \\ y &= -7t-2 \\ z &= 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b) $A(13,-6,12)$ et $d : \begin{cases} x &= 4t-3 \\ y &= -3t+6 \\ z &= 5t-10 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

c) $A(138,-138,13)$ et $d : \begin{cases} x &= t+1 \\ y &= -t-1 \\ z &= 12 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

d) $A(-5,-21,50)$ et $d : \begin{cases} x &= -5 \\ y &= 3t \\ z &= -7t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.

a) Oui pour $t = 5$.
b) Non : $13 = 4t - 3 \Leftrightarrow T = 4$ mais $12 = 5t - 10 \Leftrightarrow t = \frac{22}{5}$.
c) Non : si $z_A = 12$ alors $z_A \neq 13$.
d) $-21 = 3t \Leftrightarrow t = -7$ or $-7 \times (-7) + 1 = 50$ donc oui.

Direction d'un plan.

Définition 6. Soient A, B et C trois points de l'espace $\mathscr{E}$. On appelle *plan* (ABC) l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemples.

1. Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. $J \in (AID)$ car $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

EXERCICE 16. Donnez dans chaque cas un quatrième point du plan proposé. Par exemple, pour (ABC) le point D convient : $D \in (ABC)$.

a) (DEF). b) (HCD). c) (EFB). d) (BCF). e) (FHG).
f) (UJT). g) (PRM). h) (LBS). i) (MJI). j) (DNH).
k) (NGT). l) (PQN). m) (RQM). n) (USR). o) (HRT).

Exercice 16.

a) $C \in (DEF)$. b) $G \in (HCD)$. c) $A \in (EFB)$. d) $G \in (BCF)$.
e) $M \in (FHG)$. f) $L \in (UJT)$. g) $U \in (PRM)$. h) $Q \in (LBS)$.
i) $N \in (MJI)$. j) $J \in (DNH)$. k) $S \in (NGT)$. l) $G \in (PQN)$.
m) $? \in (RQM)$. n) $T \in (USR)$. o) $B \in (HRT)$.

EXERCICE 17. Donnez quatre points non coplanaires du cube $ABCDEFGH$.

Définition 7. Soient A, B et C trois points distincts deux à deux et non alignés. On appelle *direction du plan* (ABC) tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non nuls tel que :

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants (non colinéaires),
(ii) les images de A par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des points appartenant à (ABC).

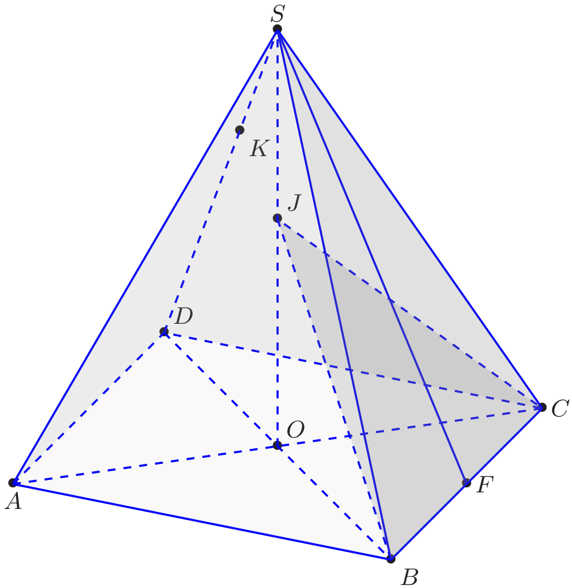
Remarques.

1. Tout plan (ABC) de l'espace admet au moins une direction : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ car les points sont distincts deux à deux et non alignés.
2. On appelle *vecteur du plan* (ABC) toute combinaison linéaire de vecteurs d'une de ss direction.

EXERCICE 18. Lisez sur la figure la décomposition en combinaison linéaire du vecteur proposé sur la direction donnée. Par exemple, pour $\overrightarrow{AC}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, on peut écrire : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AK}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. c) $\overrightarrow{IK}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. d) $\overrightarrow{LB}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
e) $\overrightarrow{DU}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. f) $\overrightarrow{FP}$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)$. g) $\overrightarrow{EJ}$ et $\left(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{QC}\right)$. h) $\overrightarrow{IM}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.
i) $\overrightarrow{BH}$ et $\left(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BA}\right)$.

EXERCICE 19.



Donnez au moins deux directions non triviales des plans suivants. Exemple : pour le plan (ABC), $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right)$ est une base triviale, $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}\right)$ n'est pas une base mais $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$ est une base qui convient.

a) (ODJ). b) (BCJ). c) (ADK). d) (SDC). e) (DOC). f) (ABS).

Proposition 3. Soient $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v})$ une direction d'un plan $\mathscr{P}$ et $A \in \mathscr{P}$. Si $M \in \mathscr{P}$ il existe un unique couple de nombres réels, (x,y), tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Remarques.

1. Le couple (x,y) est appelé *les coordonnées de* M. x est appelé *abscisse* et y *ordonnée*.
2. L'écriture $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ est une représentation paramétrique vectorielle du plan. En considérant les coordonnées nous obtenons une représentation paramétrique du plan : $\begin{cases} x_M = \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} + x_A \\ y_M = \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} + y_A \\ z_M = \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} + z_A \end{cases}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Celle-ci fait intervenir deux paramètres. S'il peut arriver que nous la rencontrions nous n'en ferons pas un grand usage.

Définition 8. Soient $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$, $A \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v})$ une direction de $\mathscr{P}$. La 3-liste $(A;\vec{u},\vec{v})$ est appelée *un repère du plan* (ABC).

Remarques.

1. Un plan peut être défini par trois points distincts deux à deux et non alignés où la donnée d'un repère.

EXERCICE 20. Nommez par trois points distincts deux à deux et non alignés, le plan dont on donne un point et une base. Par exemple pour A et $\left(\overrightarrow{DU},\overrightarrow{AB}\right)$, le plan est (ABR), ou (ASF).

a) S et $\left(\overrightarrow{SN},\overrightarrow{AD}\right)$. b) S et $\left(\overrightarrow{LU},\overrightarrow{DC}\right)$. c) D et $\left(\overrightarrow{GT},\overrightarrow{US}\right)$. d) M et $\left(\overrightarrow{EQ},\overrightarrow{HP}\right)$.
e) K et $\left(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BS}\right)$. f) U et $\left(\overrightarrow{UE},\overrightarrow{UP}\right)$. g) M et $\left(\overrightarrow{UH},\overrightarrow{KB}\right)$. h) D et $\left(\overrightarrow{UM},\overrightarrow{GT}\right)$.

i) U et $\left(\overrightarrow{SG},\overrightarrow{HS}\right)$.

Exercice 20.

a) (BFC). b) (NRS). c) (URT). d) (MFG). e) (KPL).
f) (UEP). g) (HMI). h) (DUM). i) (UBT).

Base de l'espace.

Définition 9. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$. Nous dirons que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est *une base de* $\vec{\mathscr{E}}$ si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.
Remarques.

1. L'utilisation des parenthèses n'est pas anodine : $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$ sont deux bases différentes.
2. Les vecteurs d'une base doivent permettre de se déplacer dans toutes les directions de l'espace.
3. Si 3 vecteurs de l'espace ne sont pas linéairement indépendants on dit que ce sont des *vecteurs coplanaires*. Cette dénomination indique qu'ils ne permettent pas d'atteindre tous les points de l'espace et qu'ils permettent au mieux de se déplacer dans un plan.

Proposition 4. Soit $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base de $\vec{\mathscr{E}}$. Étant donné un vecteur $\vec{s}$ de l'espace il existe une unique 3-liste (x,y,z) telle que $\vec{s} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.
Remarques.

1. L'unique 3-liste est appelée *les coordonnées* de $\vec{s}$.
2. x est appelé l'*abscisse*, y l'*ordonnée* ou *profondeur* et z la *cote* ou la *hauteur*.
3. Les coordonnées d'un vecteur se notent usuellement en colonne.
4. C'est seulement à cette étape de la leçon que nous établissons que les vecteurs de l'espace se décrivent avec trois coordonnées.

Exemples.

1. Soit un pavé droit $ABCDEFGH$. Dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$, $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 21. On considère un pavé droit $ABCDEFGH$. Dites si les 3-listes proposées sont des bases de l'espace.

a) $\left(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{BS}\right)$. b) $\left(\overrightarrow{KD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$. c) $\left(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PF}\right)$. d) $\left(\overrightarrow{RI},\overrightarrow{RM},\overrightarrow{RS}\right)$.
e) $\left(\overrightarrow{DL},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DH}\right)$. f) $\left(\overrightarrow{KG},\overrightarrow{KT},\overrightarrow{KU}\right)$. g) $\left(\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FH}\right)$. h) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{NL}\right)$.
i) $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{FS},\overrightarrow{GC}\right)$.

EXERCICE 22. Donnez 5 bases distinctes du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
EXERCICE 23. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes. Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteur dans la base proposée.

a) $\overrightarrow{AG}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HG}\right)$. c) $\overrightarrow{DH}$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF}\right)$.
d) $\overrightarrow{AN}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. e) $\overrightarrow{QM}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. f) $\overrightarrow{PJ}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

EXERCICE 24. Dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-57\end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\1\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi^3}\\\sqrt{\pi}\\\pi\end{pmatrix}$. d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 24.

a) $1\times 3 = 3$ mais $-2\times 3 \neq 1$ donc pas colinéaires.
b) $1\times(-8) = -8$ mais $7\times(-8) \neq 57$ donc pas colinéaires.
c) $\vec{v} = \sqrt{\pi}\vec{u}$ donc colinéaires.
d) $\vec{v} = 0\vec{u}$.

EXERCICE 25. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 25.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0\\ 2x & & & + & z & = & 0\\ & & y & + & z & = & 0\end{array}.$$

Avec calculatrice une unique solution $x = y = z = 0$.

EXERCICE 26. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 26. Ils constituent une base de l'espace si et seulement si ils sont linéairement indépendants.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$.

Autrement dit en considérant les coordonnées :

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 4z & = & 0\\ 2x & + & y & - & z & = & 0\\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0\end{array}.$$

En échelonnant : $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - 3L_1$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 4z & = & 0\\ & & 3y & - & 9z & = & 0\\ & & 4y & - & 10z & = & 0\end{array}.$$

Puis : $L_3 \to 3L_3 - 4L_2$ $\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 4z & = & 0\\ & & 3y & - & 9z & = & 0\\ & & & & 6z & = & 0\end{array}$.

Puis en substituant : $z = y = x = 0$.

Les vecteurs sont donc linéairement indépendants et donc forment une base de l'espace.

Définition 10. Soient $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base de $\vec{\mathscr{E}}$ et A un point de l'espace. La 4-liste $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est appelée *un repère de l'espace $\mathscr{E}$*.

Si M est un point de l'espace on appelle *coordonnées de M dans le repère* $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarques.

1. Les coordonnées de M et $\overrightarrow{AM}$ sont égales. On dira que $\overrightarrow{AM}$ est le *vecteur position* de M dans le repère. En mécanique l'utilisation du vecteur position plutôt que du point est importante : la dérivée du vecteur position est le vecteur vitesse, la dérivée du vecteur vitesse est le vecteur accélération or le vecteur accélération est (presque) homogène à une force donc un vecteur.

2. On retrouve les résultats déjà connus sur les vecteurs du plan : les coordonnées de la somme de vecteurs sont les sommes des coordonnées et les coordonnées d'un vecteur multiplié par un nombre sont les coordonnées multipliées par ce nombre.

3. Les coordonnées d'un point se notent usuellement en ligne.

4. Ce n'est qu'à cette étape de la leçon que nous voyons que des points de l'espace se décrivent avec trois coordonnées.

EXERCICE 27. On considère une pavé droit $ABCDEFGH$. Donnez les coordonnées du point dans le repère proposé.

a) D dans $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

b) G dans $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

c) K dans $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

d) D dans $\left(A;\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$.

Exercice 27.

a)

Proposition 5. Soient $\mathscr{B} = (A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$, M et P deux points de l'espace dont les coordonnées relativement à $\mathscr{R}$ sont respectivement (x_M,y_M,z_M) et (x_P,y_P,z_P). Les coordonnées de $\overrightarrow{MP}$ relativement à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ sont $(x_P - x_M,y_P - y_M,z_P - z_M)$.

Démonstration. $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}$.

EXERCICE 28. Soient $A(3,-2,-4)$, $B(4,-3,-2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils liés ?

Exercice 28.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

   $M(4,-3,-2)$.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v} \iff \overrightarrow{AB} - \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, il existe doc une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui égale le vecteur nul, donc la famille est liée.

EXERCICE 29. Soient $A(1,2,3)$, $B(2,0,3)$, et $C(6,3,8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.
2. Déterminez α, β et γ tels que : $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.
3. Déterminez α', β' et γ' tels que : $\overrightarrow{BC} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}$.
4. Déduisez-en les coordonnées du point C dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

EXERCICE 30. On considère les points $A(1,2,3)$, $B(-1,1,4)$ et $C(3,5,-2)$ dans un repère (O,I,J,K). Déterminez les coordonnées du point D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 30. $x_C - x_D = x_B - x_A \iff 3 - x_D = -1 - 1 \iff x_D = 5$.

$y_C - y_D = y_B - y_A \iff 5 - y_D = 1 - 2 \iff y_D = 6$.

$z_C - z_D = z_B - z_A \iff -2 - z_D = 4 - 3 \iff z_D = -3$.

$$\boxed{D(5,6,-3).}$$

EXERCICE 31. On considère les points $A(1,2,1)$, $B(3,-1,2)$ et $C(-1,3,4)$ dans un repère (O,I,J,K).

2. Déterminez les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 31. $x_C - x_D = x_B - x_A \Leftrightarrow -1 - x_D = 3 - 1 \Leftrightarrow x_D = -3$.
$y_C - y_D = y_B - y_A \Leftrightarrow 3 - y_D = -1 - 2 \Leftrightarrow y_D = 6$.
$z_C - z_D = z_B - z_A \Leftrightarrow 4 - z_D = 2 - 1 \Leftrightarrow z_D = 3$.

$$\boxed{D(-3,6,3).}$$

EXERCICE 32. Soient les points $A(-1;4,-3)$ et $B(2;1;3)$ dans un repère (O,I,J,K). Déterminez les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 32. $x_A - x_M + x_B - x_A = \frac{1}{3}(x_B - x_A) \Leftrightarrow -1 - x_M + 1 - x_M = \frac{1}{3}(2-(-3))$

EXERCICE 33. On considère les points $A(0,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(3,1,1)$ et $D(1,1,1)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2,2,4)$. Déterminez les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soient J le milieu de $[EF]$ et I le point tel que F soit le milieu de $[AI]$. Démontrez que J est le milieu de $[IC]$.

EXERCICE 34. Soient $A(1,2,1)$, $B(1,-1,1)$ et $C(3,1,2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $E(3,7,2)$. Déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$. Les points G, J et F sont-ils alignés ?

Norme d'un vecteur.

Définition 11. Soient $\mathscr{B}$ une base de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$, $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$, (x,y,z) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$. On appelle *norme (euclidienne) de $\vec{u}$ relativement à $\mathscr{B}$* le réel positif : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Exemples.

1.

Changement de base.

EXERCICE 35. Soient $A(2,4,-1)$, $B(3,1,2)$, $C(1,0,1)$, $D(3,2,1)$ et $E(1,2,0)$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas liés.
2. Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Où se situe le point M ?
4. Déterminez α, β, γ tels que : $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$. Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$?