

Exercices libres de terminale.

EXERCICE 1. Pour tout entier naturel n , on note F_n le n -ième nombre de Fermat. Il est défini par $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Partie A :

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que : « Tous les nombres de Fermat sont premiers ». L'objectif dans cette partie est de tester cette conjecture.

- (a) Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3 .
(b) Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?
- On considère l'algorithme ci-dessous :

```
F ← 225 + 1
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

$F \% N$ désigne le reste de la division euclidienne de F par N .

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641. Que peut-on en déduire ?

Partie B :

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.
- Pour tout entier naturel n on note : $\prod_{i=0}^n F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \dots \times F_{n-1} \times F_n$. On a donc

$\prod_{i=0}^n F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i \right) \times F_n$. Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question

précédente que pour tout entier naturel n non nul on a : $\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$.

- Justifier que, pour tous entiers naturels n et m tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n - qF_m = 2$.
- En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.