

## Cardinal.

Dans cette leçon  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nuls.

### Ensembles finis.

EXERCICE 1. Soient  $E$  et  $F$  des ensembles finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $p$ .

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

Montrez que  $f$  est bijective si et seulement si deux des conditions suivantes sont vraies.

- (i)  $f$  est surjective,
- (ii)  $f$  est injective,
- (iii)  $n = p$

EXERCICE 2. Soient  $E$  et  $F$  des ensembles finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $p$ .

1. Déterminez le nombre d'applications de  $E$  dans  $F$  en fonction de  $n$  et  $p$ .
2. Déterminez le nombre de permutations de  $E$  en fonction de  $n$ . Une permutation de  $E$  est une bijection de  $E$  sur  $E$ .
3. En supposant que  $n \leq p$ , déterminez le nombre d'injections de  $E$  dans  $F$ .

*Indication.* Vous pourrez avantageusement représenter la situation avec des arbres.

EXERCICE 3. Soient  $E$  et  $F$  des ensembles finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $p$ .

Si  $F$  est une partie de  $E$  alors le *complémentaire* de  $F$  dans  $E$ , et on note  $\overline{F}$  ou  $\mathbb{C}_E F$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  qui ne sont pas éléments de  $F : \overline{F} = \{x \in E \mid x \notin F\}$ .

Conjecturez, si  $F \subset E$ , l'expression de  $|\overline{F}|$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

EXERCICE 4. Soient  $E$  et  $F$  des ensembles finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $p$ .

Exprimez  $|E \times F|$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

EXERCICE 5. Soient  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p \geq 3$  un entier naturel.

Exprimez  $|E^p|$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

EXERCICE 6. Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble de toutes les parties (sous-ensembles) de  $E$ . Par exemple si  $E = \{a, b, c\}$  alors

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, E \};$$

dans cet exemple  $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 8$ .

Conjecturez l'expression de  $\text{card}(\mathcal{P}(E))$  en fonction de  $n$ .

### Ensembles infinis.

EXERCICE 7. Démontrez que l'ensemble des nombres premiers est infinis.

EXERCICE 8. Exprimez avec des quantificateurs le fait qu'un ensemble  $E$  n'est pas fini.

EXERCICE 9. Démontrez que les ensembles suivants ont le même cardinal que  $\mathbb{N} : \mathbb{N}^*$ , l'ensemble des entiers naturel pairs, l'ensemble des entiers naturels impairs.