Cardinal.

Dans cette leçon n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Ensembles finis.

Définition 1. On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E ou si E est vide.

Remarques.

1. Autrement dit E est fini si et seulement si il existe un entier naturel n non nul tel que E soit équipotent à $[\![1,n]\!]$ ou à $\varnothing$.

Proposition 1. Tout ensemble équipotent à un ensemble fini est lui-même fini.

Proposition 2. Soit E un ensemble fini non vide. Il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \simeq [\![1,n]\!]$.

Remarques.

1. Si E est non vide le nombre n est appelé le *cardinal* de E et est noté $|E|$.
2. Si E est vide alors on pose $|E| = 0$.

Proposition 3. Soient E et F des ensembles.

(i) Si F est fini alors il existe une injection de E dans F si et seulement si E est fini et $|E| \leqslant |F|$.

(ii) Si E est fini alors il existe une surjection de E sur F si et seulement si F est fini et $|E| \geqslant |F|$.

(iii) Si E ou F est fini alors il existe une bijection de E sur F si et seulement si E et F sont finis et $|E| = |F|$.

Démonstration. Utilise les résultats non démontrés sur les comparaisons des $[\![1,n]\!]$.

Proposition 4. Si E est un ensemble fini alors toute partie F de E est finie et : $|F| \leqslant |E|$.

Remarques.

1. En particulier, pour E et F des ensembles finis, $|E \cap F| \leqslant \min(|E|,|F|)$ et $\max(|E|,|F|) \leqslant |E \cup F|$.

Proposition 5. Soient E et F des ensembles finis. $|E \cup F| + |E \cap F| = |E| + |F|$.

Démonstration.

EXERCICE 1. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Soit $f : E \to F$ une application.

Montrez que f est bijective si et seulement si deux des conditions suivantes sont vraies.

(i) f est surjective,

(ii) f est injective,

(iii) $n = p$

EXERCICE 2. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

1. Déterminez le nombre d'applications de E dans F en fonction de n et p.
2. Déterminez le nombre de permutations de E en fonction de n. *Une permutation de E est une bijection de E sur E.*
3. En supposant que $n \leq p$, déterminez le nombre d'injections de E dans F.

Indication. Vous pourrez avantageusement représenter la situation avec des arbres.

Exercice 2.

1. On peut construire un arbre dont chaque niveau correspond au choix d'une image, dans F, d'un élément de E.
   $\left|F^E\right| = p^n$.

2. Même idée que précédemment mais avec un tirage sans remise. Un élément de F déjà choisi ne peut plus être utilisé comme une image.
   $|\mathfrak{S}_n| = n!$.
3. Même que précédemment.
   $p \times (p-1) \times \cdots \times (p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$.

EXERCICE 3. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Si F est une partie de E alors le *complémentaire* de F dans E, et on note $\overline{F}$ ou $\complement_E F$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de F : $\overline{F} = \{x \in E | x \notin F\}$.

Conjecturez, si $F \subset E$, l'expression de $\left|\overline{F}\right|$ en fonction de n et p.

Exercice 3. $\text{card}\left(\overline{F}\right) = n - p$

EXERCICE 4. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Exprimez $|E \times F|$ en fonction de n et p.

Exercice 4. $\text{card}(E \times F) = n \times p$

EXERCICE 5. Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \geq 3$ un entier naturel.

Exprimez $|E^p|$ en fonction de n et p.

Exercice 5. $\text{card}(E^p) = n^p$

EXERCICE 6. Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties (sous-ensembles) de E. Par exemple si $E = \{a,b,c\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\ \varnothing\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ E\ \};$$

dans cet exemple $\text{card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 8$.

Conjecturez l'expression de $\text{card}\left(\mathcal{P}(E)\right)$ en fonction de n.

Exercice 6. $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

démonstration 1 Il y a autant d'éléments dans $\mathcal{P}(E)$ que d'applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0;1\}$. Il suffit de considérer $A \mapsto \chi_A$ où χ_A désigne la fonction indicatrice (ou caractéristique)de A.

démonstration 2 Par récurrence sur la taille de E. On ajoute un élément a et on distingue les parties contenant a de celles ne contenant pas a.

Ensembles infinis.

Les raisonnements sur les ensembles infinis sont souvent peu aisés et paradoxaux : existe-t-il un ensemble de tous les ensembles ?

C'est en utilisant la notion de bijection que l'on peut comparer des infinis.

Définition 2. Un ensemble est dit *infini* s'il n'est pas fini.

EXERCICE 7. Démontrez que l'ensemble des nombres premiers est infinis.

Exercice 7. Raisonnement par l'absurde.

Supposons que l'ensemble E des nombres premiers est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$: $E = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$.

Alors $q = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1 \notin E$. Donc q n'est pas premier.

D'après le théorème fondamental de l'algèbre q est donc divisible par un nombre premier : $\exists j \in [\![1,n]\!]$, $p_j | q$.

De $q = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$ nous déduisons : $0 = 0 + 1 \mod (p_j)$.

Ce qui est impossible donc E n'est pas fini.

EXERCICE 8. Exprimez avec des quantificateurs le fait qu'un ensemble E n'est pas fini.

Définition 3. Un ensemble est dit *dénombrable* s'il a un cardinal inférieur ou égale à celui de $\mathbb{N}$. $|\mathbb{N}|$ est noté par une lettre hébraïque $\aleph_0$ et est appelé *aleph zéro*.

Remarques.

1. Pour démontrer qu'un ensemble est dénombrable il suffit de montrer qu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

2. Autrement dit E est dénombrable si je parviens à construire une suite qui contient tous les éléments de E.

EXERCICE 9. Démontrez que les ensembles suivants ont le même cardinal que $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturel pairs, l'ensemble des entiers naturels impairs.

Exercice 9. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$

En notant $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres pairs :

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{P} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \overline{\mathbb{P}} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array}\right.$

Des résultats peu évidents à démontrer.

1. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Autrement dit $\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini.
2. $\mathbb{Q}$ est dénombrable. On retrouve un exemple du paradoxe suivant : une partie est aussi grande que le tout.
3. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$. On parle aussi de puissance du continu.
4. Les ensembles E et $\mathcal{P}(E)$ n'ont pas le même cardinal.