

Irrationalité de e.

EXERCICE 1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $e - a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.
Indication : on pourra procéder par récurrence.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 < e - a_n < \frac{1}{n \times n!}$.
En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto (1-t)e^t$.
4. En déduire une valeur de n telle que a_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près.
5. On suppose que e est un nombre rationnel.
 - (a) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que le nombre $eq!$ soit un entier naturel.
 - (b) Montrer que $x = q! \left(e - \sum_{p=0}^q \frac{1}{p!} \right)$ est un entier naturel.
 - (c) Montrer que $0 < x < 1$.
 - (d) Conclure.

Exercice 1.

1. (a_n) est clairement strictement croissante comme somme de termes strictement positifs.
 $b_{n+1} - b_n < 0$ donc suite strictement décroissante.
 $b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. $e - a_{n+1} = e - a_n - \frac{1}{(n+1)!} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$ avec une intégration par parties.
- 3.
4. a_7 .
5.
 - (a) Si $e = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ alors $b!e \in \mathbb{Z}$. D plus $e > 0$ donc $a > 0$ et $b!e \in \mathbb{N}$.
 - (b) $q!e \in \mathbb{N}$, $\frac{q!}{p!} \in \mathbb{N}$ car $p \leq q$ donc $x \in \mathbb{Z}$. $e - a_q > 0$ donc $x \in \mathbb{N}$.
 - (c) $\frac{1}{q \times q!} > e - a_q > 0$ donc $1 > x > 0$.
 - (d) Contradiction entre les deux précédentes réponse. Démonstration par l'absurde de l'irrationalité de e .