Inégalité des accroissements finis.

Le théorème.

Théorème 1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a,b]$.
Si : $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Démonstration.

Quel que soit $t \in [a,b]$:

$$-M \leqslant f'(t) \leqslant M$$

Puisque f' est continue sur $[a,b]$ on peut intégrer :

$$\int_a^b -M \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M \, \mathrm{d}t$$
$$-M(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$$

Remarques.

1. La condition « $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$ » signifie que f' est bornée.
2. Dans le théorème on se place dans le cas $a \leqslant b$. cependant dans les exercices nous ne saurons pas forcément l'ordre entre a et b. Dans ce cas l'inégalité s'écrit : $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$.

Fonctions lipschitzienne.

Exercices.

EXERCICE 1. *Bac 88 C et E. Tunisie-Grèce.*

Partie A. Étude de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^x - 2 - x\mathrm{e}^x$.

1. Étudiez les variations de f et les limites de f quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$; dressez son tableau de variation.
2. Déduisez de l'étude de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ l'existence pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f d'une asymptote (D) ; déterminez l'intersection de $\mathscr{C}$ et de (D) et la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite (D).
3. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions dont l'une notée a dans la suite du problème vérifie $1{,}5 < a < 1{,}6$. Quelle est l'autre solution ?
4. Tracez $\mathscr{C}$ et (D) dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

Partie B. Étude de la suite numérique u définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2 - 2\mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Étude théorique.
   On désigne par I l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
   (a) Étudiez les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{-x}$. montrez que $g(I) \subset I$ et que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Montrez, par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I puis que la suite u est croissante. Déduisez-en que la suite est convergente vers un réel ℓ tel que $g(\ell) = \ell$. Montrez à l'aide de la partie A que $\ell = a$.

(c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrez que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$ puis que : $|u_n - a| \leqslant \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. Étude numérique : soit p un entier strictement positif.

   (a) Utilisez l'inégalité précédente pour déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égale à n_0, on ait $|u_n - a| \leqslant 10^{-p}$. Précisez n_0 pour $p = 3$.

   (b) Écrivez la valeur approchée par défaut avec 3 décimale de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_7 que permet de trouver votre calculatrice.