

Continuité.

Un exemple.

Définition.

Les fonctions continues de références.

Des procédés pour construire des fonctions continues à partir d'autres fonctions continues.

Une condition suffisante de continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires.

EXERCICE 1. Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 - 8}{x^2 + 1}$ une fonction définie sur $[0; 1]$.

1. Calculez $f(0)$ et $f(1)$.
2. Justifiez que l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
3. Les plus braves détermineront l'ensemble des antécédents de -5 .

EXERCICE 2. Démontrez que l'équation $\sqrt{x} + e^x - 2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Théorème des valeurs intermédiaires avec des fonctions strictement monotones.

EXERCICE 3. Déterminez $f(]2; +\infty[)$ lorsque $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2 - 4}\right)$.

EXERCICE 4. Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2; +\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.

EXERCICE 5. Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 1]$.

EXERCICE 6. Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α .
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2} .

EXERCICE 7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g .
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α . Donnez un encadrement de α à 0,1 près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x}{x^3 + 1}.$$

- (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
- (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $] -1, +\infty[$.

EXERCICE 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

EXERCICE 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$.

1. Calculez pour tout réel x , $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f' .

3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à 0,1 près.

(b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

(c) Dressez le tableau de variation de f .

EXERCICE 10. On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $3x - 2 \cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 3x - 2 \cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f .

2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à 0,1 près de α .

Exercices.

EXERCICE 11. On note : $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

1. Étudiez le sens de variation des trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par P_1 , P_2 et P_3 et tracez leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ sur un même graphique. on précisera les positions relatives de ces trois courbes ainsi que leur points d'intersections deux à deux.

On se propose de calculer la racine de l'équation $P_3(x) = 0$.

2. On note r cette racine. Montrez que r existe et est unique. Donnez un encadrement de r d'une longueur égale à 10^{-2} .

3. Montrez que si $t = -r$, t vérifie la relation : $t = 3 \frac{2+t^2}{6+t^2}$.

4. Étudiez la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \frac{3(2+x^2)}{6+x^2}$. Tracez sa courbe représentative sur $[0; 3]$. Cherchez le maximum de la dérivée φ' de φ lorsque x est positif.

5. Pour calculer une valeur approchée de t on construit la suite : $u_0 = 1,59$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculez $u_{n+1} - t$ en fonction de u_n et de t .

(b) Montrez que : $u_n - t$ est de signe constant, u_n appartient à l'intervalle $[1; 1,6]$, $|u_{n+1} - t| < \frac{12}{7 \times 8,5} |u_n^2 - t^2| < \frac{12 \times 3,2}{7 \times 8,5} |u_n - t|$, $|u_{n+1} - t| < \frac{12}{8,5^2} |u_n^2 - t^2| < 0,532 |u_n - t|$.

Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers t .

EXERCICE 12. *Bac 1976 Série C remplacement Clermont-Ferrand.* Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$.

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x + 1) + \ln(x - 1)$. Même question pour l'équation $\ln(x^2 - 1) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$.

2. Étudiez les variations de f et la représenter graphiquement.

EXERCICE 13. *Bac C 1988. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes.* Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} (x^2 + 1 - \ln(x))$ et de construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$, ce qui fait l'objet de la partie I, puis de décrire un procédé d'approximation du nombre α pour lequel f atteint son minimum, ce qui fait l'objet de la partie II.

I Étude de f et construction de $\mathcal{C}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.

- (a) Étudiez le sens de variation de g et ses limites en 0 et $+\infty$. (On ne demande pas la représentation graphique de g .)
- (b) Déduisez-en que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que : $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.
- (c) Étudiez le signe de $g(x)$.

2. Étude de f .

- (a) Étudiez les limites de f en 0 et $+\infty$.
- (b) Exprimez f' à l'aide de $g(x)$. Déduisez-en le sens de variation de f .

3. Construction de la courbe $\mathcal{C}$.

Le plan est rapport au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On choisit pour unité graphique 2 cm.

- (a) Montrez que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}$.
- (b) Déterminez le point d'intersection B de $\mathcal{C}$ et de Δ ; précisez la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ .
- (c) Construisez la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ , en précisant la tangente en B à $\mathcal{C}$.

4. Calcul d'un aire.

Pour tout nombre réel $t \geq e$ calculez l'aire $A(t)$ de la portion de plan comprise entre $\mathcal{C}$ et Δ et les droites d'équations $x = e$ et $x = t$.

II Approximation de α .

- 1. (a) Montrez que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $I = [1,30; 1,35]$ par : $h(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.
- (b) Justifiez la décroissance de h sur I et montrez que pour tout élément x de I , $h(x)$ appartient à I .
- (c) Prouvez que, pour tout élément x de I : $-\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.
- (d) Déduisez-en que pour tout élément x de I : $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|$.
- 2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1,30$.
- (a) Montrez que pour tout entier n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$.
- (b) Déduisez-en que pour tout entier n : $|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{100} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- (c) Déterminez la limite de la suite (u_n) .
- (d) Précisez un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$ et donnez la valeur de u_{n_0} .

EXERCICE 14. *Bac série C 1968. Mexico.* En étudiant les variations de la fonction y définie par $y(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-2x}$ (dont on ne construira pas le graphe), montrez que, dans l'ensemble des nombres réels positifs, l'équation $(x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0$ admet une racine réelle et une seule.