Continuité.

Un exemple.

Nous n'avons pas beaucoup regarder les limites à l'intérieur du domaine de définition laissant entendre qu'il ny a pas de problème. regardon ce qui ce passe pour ctte fonction (affine par morceaux). On remarque limite différentes à droite et à gauche donc pas de limite de f.Graphiquement que ce passe t il : une discontinuité.

Nous avons passé, pour l'instant sous silence la limite d'une fonction en dehors des bornes ouvertes du domaine de définition. Le plus souvent (avec les fonctions de référence) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ si a est intérieur au domaine de définition de f. Ce n'est pas toujours aussi simple.

Considérons la fonction f affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ si } x<2 \\ -3x+10 \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

- $f(-1)$ se calcule avec la première formule car $-1 < 2$ et donc $(-1) = 2\times(-1)+1 = -1$
- $f(4) = -3\times 4+10 = -2$.
- $f(2) = -3\times 2+10 = 4$ car l'inégalité large indique qu'il faut utiliser la seconde formule.

Recherchons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2. Pour trouver la limite il faut considérer un voisinage ouvert de 2 mais suivant qu'on est à droite ou gauche de 2 dans ce voisinage ce n'est pas la même formule qui défini f. On peut regarder les limites par valeurs inférieures et supérieures : $\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\x<2}} 2x+1 = 5$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\x>2}} -3x+10 = 4$.

Nous voyons que nous n'obtenons pas les mêmes valeurs à droite et à gauche et donc qu'il n'y a pas de limite de f en a.

Une dernière remarque : sur une représentation graphique nous voyons que le point d'abscisse 2 est un point de discontinuité de $\mathscr{C}_f$: le tracé se fait avec deux lignes séparées.

Définition.

Définition 1. Soient i un intervalle ouvert, f une application sur I, $a \in I$. Une application f est dite *continue en* $a \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarques.

1. Nous dirons que f *est continue sur* $\mathscr{D}$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.
2. Cette définition ne permet pas de définir la continuité en a lorsque $\mathscr{D} = [a,b]$.
3. Graphiquement une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative peut être tracée sans lever le stylo.
4. Comme la dérivation ou la croissance, la continuité est une propriété locale : il faut regarder ce qui se passe au voisinage d'un point.
5. Une fonction sera dite *discontinue* si et seulement si elle n'est pas continue.

Proposition 1. Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application sur I. f est continue en a si et seulement si f admet des limites réelles à droite et à gauche en a égales à $f(a)$.

Démonstration.

* Supposons f continue en a.
Soient α et β des réels tels que $\alpha < a < \beta$.
Puisque $]\alpha,\beta[$ est un voisinage ouvert de a et que f est continue en a, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.
Donc : $\forall x \in I \cap]-\infty,a[,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.

Autrement dit $\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$.
De même $\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$.

* Réciproquement, supposons que f admet en a des limites à droite et à gauche égales à $f(a)$.
Soient α et β des réels tels que $\alpha < a < \beta$.
Puisque $\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$, il existe un voisinage ouvert I_d de a tel que : $\forall x \in I_d \cap]a, +\infty[,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.
De même de $\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$, nous déduisons l' existence d'un voisinage ouvert I_g de a tel que : $\forall x \in I_g \cap]-\infty,a[,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.
$I_d \cap I_g$ est un voisinage ouvert de a et : $\forall x \in I_g \cap I_d,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.

Remarques.
1. Ce résultat permet si nécessaire (deux formules comme dans l'exemple introductif) de montrer une limite.
2. Nous en déduisons par contraposition que : si f n'admet pas de limite à droite ou à gauche en a alors f n'est pas continue en a. C'est une méthode à retenir pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.
3. Nous dirons, si f est définie sur $[a,b]$, que f est continue en a la limite de f en par valeurs supérieures est égale à $f(a)$ (et tant pis pour la limite à gauche).

Exemples.
1. Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction partie entière n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.

Les fonctions continues de références.

Les fonctions de référence que vous connaissez sont toutes continues. Pensez à leurs courbes représentatives qui sont d'un seul tenant.

Des procédés pour construire des fonctions continues à partir d'autres fonctions continues.

Comme pour les fonction dérivées, pour obtenir de nouvelles fonctions continues à partir des fonctions de référence on peut les additionner, les multiplier, les inverser, faire des combinaisons linéaire, les composées afin d'obtenir de nouvelles fonctions continues.

Une condition suffisante de continuité.

Proposition 2. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1. Soient a et b des réels avec $a < b$, f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.
Remarques.
1. Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
2. Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
3. L'image continue d'un intervalle I est un intervalle noté $f(I)$. De plus l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

EXERCICE 1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8}{x^2 + 1}$ une fonction définie sur $[0; 1]$.

1. Calculez $f(0)$ et $f(1)$.
2. Justifiez que l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.
3. Les plus braves déterminerons l'ensemble des antécédents de -5.

EXERCICE 2. Démontrez que l'équation $\sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Théorème des valeurs intermédiaires avec des fonctions strictement monotones.

Les différentes images continues d'intervalles.

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I. a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant les cas.

I	Croissante sur I, alors $f(I) =$	Décroissante sur I, alors $f(I) =$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

EXERCICE 3. Déterminez $f(]2;+\infty[)$ lorsque $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

Exercice 3. f est dérivable sur $]2,+\infty[$ (donc continue) et $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}\mathrm{e}^{1/(x^2-4)} < 0$. f est décroissante.

$\lim\limits_{\substack{\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Enfin : $f(]2,+\infty[) =]0,+\infty[$.

Proposition 3. Soient a et b des réels avec $a < b$, f une fonction définie sur $[a,b]$. Si f continue est strictement monotone sur $[a,b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Pour $k = 0$ alors il suffit de s'assurer que la fonction est continue, strictement monotone et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires pour affirmer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Pour montrer que que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire il suffit de vérifier que $f(a)f(b) < 0$.
2. On peut étendre le corollaire en travaillant avec des intervalles semi-ouverts ou ouverts ($]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$) a et b étant pris dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans ce cas on considère $\lim_a f$ et $\lim_b f$ à la place de $f(a)$ et $f(b)$. *Confer supra.*

EXERCICE 4. Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2; +\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.

EXERCICE 5. Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 1]$.

EXERCICE 6. Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

EXERCICE 7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à 0,1 près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 7.

1. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]-\infty,1[$ admet un maximum local égale à -1.
   g est continue sur $]1, +\infty[$ et strictement croissante donc $f(]1, +\infty[) =]-2, +\infty[$.
   Comme $0 \in]-2, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Enfin α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

4. (a) $f'(x) = \frac{-1\times(x^3+1)-(1-x)\times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}.$

(b)

x	-1		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

EXERCICE 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 8.

1. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   * f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x - 1 = 6x^2 - 5x - 1$.
   * 1 est racine évidente du trinôme $6x^2 - 5x - 1$ donc la seconde racine est $-\frac{1}{6}$.
     Enfin le trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 6) sauf entre les racines.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$ avec $x > 1$.
     $f(x) = x^3\left(2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3}\right)$.
     Or d'une part, par somme : $\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} = 2$ et d'autre part $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, par produit : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. * D'après le tableau de variation f admet un maximum égale à $\frac{1}{2}$ qui est atteint en 0. Nous en déduisons que $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[0; 1]$.
   * f est continue sur $[1, +\infty[$ (car polynomiale).
     f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
     $f([1, +\infty[) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$.
     Comme $2 \in [-1, +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$.

$$\boxed{f(x) = 2 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}_+.}$$

EXERCICE 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$.

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à 0,1 près.
   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 9.

1. f est polynomiale donc indéfiniment dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 + 6x - 5$ puis $f''(x) = 12x^2 + 6$.
2. * $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   * Clairement $f'' \geqslant 6 > 0$ donc f' est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
f''	$+$	
f'	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale),
   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
   $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$,
   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
   Avec la calculatrice : $0{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}7$.
   (b) De la question précédente nous déduisons

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

4. $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} = +\infty$ donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 10. On veut résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,\pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à 0,1 près de α.

Exercices.

EXERCICE 11. *Bac 1976 Série C remplacement Clermont-Ferrand.* Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2-1}$.

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x + 1) + \ln(x - 1)$. Même question pour l'équation $\ln(x^2 - 1) = 2\ln(x = +\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Calculez $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.
2. Étudiez les variations de f et la représenter graphiquement.

EXERCICE 12. *Bac C 1988. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes.* Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + 1 - \ln(x)\right)$ et de construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$, ce qui fait l'objet de la partie I, puis de décrire un procédé d'approximation du nombre α pour lequel f atteint son minimum, ce qui fait l'objet de la partie II.

I **Étude de f et construction de $\mathscr{C}$.**

1. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.
   (a) Étudiez le sens de variation de g et ses limites en 0 et $+\infty$. (On ne demande pas la représentation graphique de g.)
   (b) Déduisez-en que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que : $1{,}30 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}35$.
   (c) Étudiez le signe de $g(x)$.
2. Étude de f.
   (a) Étudiez les limites de f en 0 et $+\infty$.
   (b) Exprimez f' à l'aide de $g(x)$. Déduisez-en le sens de variation de f.
3. Construction de la courbe $\mathscr{C}$.
   Le plan est rapport au repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On choisit pour unité graphique 2 cm.
   (a) Montrez que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) Déterminez le point d'intersection B de $\mathscr{C}$ et de Δ ; précisez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   (c) Construisez la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, en précisant la tangente en B à $\mathscr{C}$.
4. Calcul d'un aire.
   Pour tout nombre réel $t \geqslant \mathrm{e}$ calculez l'aire $A(t)$ de la portion de plan comprise entre $\mathscr{C}$ et Δ et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = t$.

II **Approximation de α.**

1. (a) Montrez que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $I = [1{,}30; 1{,}35]$ par : $h(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.
   (b) Justifiez la décroissance de h sur I et montrez que pour tout éément x de I, $h(x)$ appartient à I.
   (c) Prouvez que, pour tout élément x de I : $-\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
   (d) Déduisez-en que pour tout élément x de I : $|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}\,|x - \alpha|$.
2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1{,}30$.
   (a) Montrez que pour tout entier n : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.
   (b) Déduisez-en que pour tout entier n : $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   (c) Déterminez la limite de la suite (u_n).
   (d) Précisez un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$ et donnez la valeur de u_{n_0}.

EXERCICE 13. *Bac série C 1968. Mexico.* E n étudiant les variations de la fonction y définie par $y(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-2x}$ (dont on ne construira pas le graphe), montrez que, dans l'ensemble des nombres réels positifs, l'équation $(x-1)\mathrm{e}^{x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une racine réelle et une seule.