Dérivation.

Nombre dérivé.

Définition 1. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I. On dit que f est *dérivable en a* si et seulement si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Si c'est le cas, alors cette limité est notée $f'(a)$ et appelée *nombre dérivée de f en a*.

Exemples.

1. La fonction constante égale à 2 est dérivable en 3 puisque $\frac{2-2}{x-3} = 0 \underset{x \to 3}{\longrightarrow} 0$ et son nombre dérivé en 3 est 0.
2. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. En effet $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.
   Ainsi : $\frac{|x|-|0|}{x-0} \underset{\substack{x \to 0 \\ x<0}}{\longrightarrow} -1$ et $\frac{|x|-|0|}{x-0} \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} 1$ donc, par unicité de la limite, $\frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'a pas une limite finie en 0.
3. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais elle ne correspond pas à notre définition car 0 est la borne de son domaine de définition et n'appartient pas à un intervalle ouvert.

Remarques.

1. La quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelée *taux d'accroissement de f entre a et x*. Il s'interprète graphiquement comme le coefficient directeur de la droite, appelée sécante à $\mathscr{C}_f$, passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

Proposition 1. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I. f est dérivable en a si et seulement si il existe un nombre m et une fonction ε définie sur I tels que : $\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + m(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$.

Et si f est dérivable en a alors $m = f'(a)$.

Démonstration. Démontrons le résultat par implication directe puis réciproque.

* Supposons que f est dérivable en a et démontrons l'existence de m et ε.
  Notons $m = f'(a)$ qui existe puisque f est dérivable en a. Notons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et $\varepsilon(a) = 0$. Clairement $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
* Réciproquement, supposons l'existence de m et ε et démontrons que f est dérivable en a.
  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} m$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = m$.

Remarques.

1. On remarque l'équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
2. L'écriture $f(x) = f(a)+m(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ est appelée *développement limité à l'ordre 1 en a de f*.
3. Cette façon de voir le nombre dérivée (caractérisation) simplifie les démonstrations théoriques que nous ferons dans la suite.

Proposition 2. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration. f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel d et une fonction ε telle que $f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc si f est dérivable $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarques.

1. La réciproque est fausse. C'est pour cela que l'on parle de condition suffisante : la continuité n'impose pas de façon nécessaire la dérivabilité de la fonction. Le contre

exemple usuel est celui de la fonction valeur absolue en 0. Il y a le même phénomène avec la fonction racine cubique en 0.

Tangente.

Il s'agit d'une interprétation géométrique du nombre dérivé comme coefficient directeur d'une tangente à la courbe représentative de la fonction.

Définition 2. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I, $\mathscr{R}$ un repère du plan. Si f est dérivable en a alors on appelle *ctangente à $\mathscr{C}_f$ dans $\mathscr{R}$ au point d'abscisse a* la droite dont une équation dans $\mathscr{R}$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Fonction dérivée.

Définition 3. Soient I un intervalle ouvert et f une application définie sur I. Si f est dérivable en tout $a \in I$ on dit que f est dérivable sur I et on note f' la fonction définie sur I par $f' : a \mapsto f'(a)$. f' est appelée *dérivée de f*.

Remarques.

1. Si la fonction dérivée est elle même dérivable on peut la dériver est obtenir la dérivée seconde qu'on note f''. On peut réitérer est obtenir des dérivées successives. Pour $n \geqslant 3$ un entier on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

Fonctions puissances.

Proposition 3. Soient $m \in \mathbb{R}$ et m des réels. $x \mapsto mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante égale à m.

Démonstration. $f(x) - f(a) = m(x-a) = m(x-a) + (x-a) \times 0$.

Remarques.

1. En particulier les fonctions constantes et la fonction identité sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont respectivement la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

Proposition 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration. Soient n un entier supérieur ou égale à 2 et $a \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x^n - a^n &= ((x-a)+a)^n - a^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} (x-a)^{n-k} a^k\right) - a^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k}\right) - a^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \\
&= \binom{n}{1}(x-a) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \\
&= \binom{n}{1}(x-a)a^{n-1} + (x-a)\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^{k-1} a^{n-k}
\end{aligned}$$

Or $k \geqslant 2$ donc $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(x-a)^{k-1}a^{n-k} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Et par conséquent f est dérivable en a et $f'(a) = \binom{n}{1}(x-a)a^{n-1} = na^{n-1}$.

Linéarité de la dérivation.

Proposition 5. Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g des fonctions définies et dérivables en a. La fonction $\lambda f + g$ définies sur I par $(\lambda f + g) : x \mapsto \lambda f(x) + g(x)$ est dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

Démonstration. f et g étant dérivables en a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$. En multipliant par λ puis en sommant membre à membre : $\lambda f(x) + g(x) = \lambda f(a) + g(a) + \left(\lambda f'(a) + g'(a)\right)(x-a) + (x-a)\left(\lambda\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right)$.Or $\lambda\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ donc $\lambda f + g$ est dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

Remarques.

1. Le résultat est ponctuel, en a, mais il se généralise sans problème à l'intervalle I.
2. On dit que la dérivation est linéaire, elle respecte les combinaisons linéaires. Par conséquent l'ensemble des fonctions dérivables sur I est un espace vectoriel.
3. De la dérivabilité des fonctions puissances et de la linéarité de la dérivation nous déduisons le résultat important au lycée : toute fonction polynomiale, $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dérivation d'un produit.

Proposition 6. Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, f et g des fonctions définies et dérivables en a. La fonction produit fg, définie par $(fg) : x \mapsto f(x) \times g(x)$, est dérivable en a et $(fg)'(a) = (f'g)(a) + (fg')(a)$.

Démonstration. f et g étant dérivables en a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$. En multipliant membre à membre : $f(x)g(x) = \left(f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\right)\left(g(a) + g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_2(x)\right) = f(a)g(a) + f(a)g'(a)(x-a) + f(a)(x-a)\varepsilon_2(x) + f'(a)(x-a)g(a) + f'(a)(x-a)g'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)(x-a)\varepsilon_2(x) + (x-a)\varepsilon_1(x)g(a) + (x-a)\varepsilon_1 g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x-a)\varepsilon_2(x) = f(a)g(a) + \left[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right](x-a) + (x-a)\Big[f(a)\varepsilon_2(x) + f'(a)g'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)g(\ldots$

Or $f(a)\varepsilon_2(x) + f'(a)g'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)g(a) + (x-a)\varepsilon_1 g'(a) + (x-a)\varepsilon_1\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ donc fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Composition et dérivation.

Proposition 7. Soient I et J des intervalles ouverts, $f : I \to J$ une fonction définie sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur J. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Par construction $f(a) \in J$. f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction ε_1 définie au voisinage de a telle que : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

De même g est dérivable en $f(a)$ si et seulement si il existe une fonction ε_2 définie au voisinage de $f(a)$ telle que : $g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(x)$

et $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g\circ f(a) + g'\circ f(a)(f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon_1(x)) + (f(x)-f(a))\varepsilon_2(x) \\ &= g\circ f(a) + g'\circ f(a)f'(a)(x-a) + g'\circ f(a)(x-a)\varepsilon_1(x) \\ &\quad + (f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(x) \\ &= g\circ f(a) + g'\circ f(a)f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_3(x) = g'\circ f(a)\varepsilon_1(x) + (f'(a)+\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

$g\circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)' = g'\circ f \times f'$.

Remarques.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et u est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, alors u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
2. Confer la leçon sur la composition.

Dérivation de la fonction inverse.

Proposition 8. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ par exemple. Le taux d'accroissement de f entre $x \in \mathbb{R}_=^*$ et a est : $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = -\frac{1}{ax} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Remarques.

1. Si u est une application dérivable et ne s'annulant pas sur I un intervalle ouvert alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Dérivation d'un quotient.

Proposition 9. Soit I un intervalle ouvert, f et g des fonctions définies et dérivables sur I, g ne s'annulant pas sur I. La fonction quotient $\frac{f}{g}$, définie par $\left(\frac{f}{g}\right) : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Démonstration. On utilise les résultats précédents : dérivation d'un produit et dérivation de l'inverse et composition.

D'autres fonctions puissances.

Proposition 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f : x \mapsto x^{-n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

Démonstration. Composition d'une fonction puissance par une fonction inverse.

Remarques.

1. Avec la notation $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ on retrouve la même formule que pour les fonctions puissances.

Dérivation de la fonction racine carrée.

Proposition 11. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x-a)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Remarques.

1. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais nous ne l'avons pas démontré et pour cause : nous n'avons pas donné de définition de la dérivabilité aux bornes du domaine de définition.
2. Par le biais de la fonction exponentielle il est possible de définir des fonctions puissances d'un nombre réel quelconque sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans ce cadre : $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et on obtient bien une généralisation de la dérivation des fonctions puissances.

Dérivation et variation.

Proposition 12. Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.

(*i*) $f' \geqslant 0$ si et seulement si f est croissante.
(*ii*) $f' \leqslant 0$ si et seulement si f est décroissante.
(*iii*) $f' = 0$ si et seulement si f est constante.
(*iv*) Si $f' > 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante.
(*v*) Si $f' < 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration. L'idée (très approximative) de la démonstration est la suivante pour le cas $f' \geqslant 0$. Pour h suffisamment proche de 0 le taux d'accroissement est positif : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Donc pour $h > 0$, $f(a+h) - f(a) \geqslant 0$. Ou encore : $f(a) \leqslant f(a+h)$. f conserve l'ordre entre a et $a+h$. Autrement dit f est croissante.

La réciproque est du même tabac.

Remarques.
1. Par convention les tableaux de variations indiquent la stricte monotonie. Pour les construire nous utiliserons donc les implications (*iv*) et (*v*) correspondantes.
2. Le (*ii*) offre une caractérisation des fonctions constantes. Autrement dit c'est un moyen des démontrer qu'une fonction est constante. Nous utiliserons ce résultat dans des démonstrations de la leçon sur la fonction exponentielle.
3. Ce résultat n'est valable que sur un intervalle. En effet, il n'est qu'à considérer la fonction inverse pour voir que le théorème ne fonctionne pas si on est pas sur un intervalle.

Exemples.
1. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 7$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   Étudions les variations de f sur $]0; +\infty[$.
   La démarche pour étudier les variations d'une fonction se fera désormais ainsi :
   (a) calcul de la fonction dérivée,
   (b) étude du signe de la fonction dérivée,
   (c) construction d'un tableau indiquant le signe de la fonction dérivée puis les variations de la fonction.

   (a) Déterminons la dérivée de f.
   f est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $]0; +\infty[$ et quelque soit $x \in]0; +\infty[$,
   $$f'(x) = -2x + 4$$
   (b) Étudions le signe de f'.

f' est donc une fonction affine. Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Comme son coefficient directeur $a = -2 < 0$, elle et strictement positive sur $]0; 2[$ et strictement négative sur $]2; +\infty[$.

(c) Nous en déduisons

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	

2. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 13$ définie sur $\mathbb{R}$.
Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}$.
En devoir surveillé une telle question, qui nécessite de nombreuses étapes, sera coupée en plusieurs sus questions : calculez la fonction dérivée, étudiez le signe de la fonction dérivée, dressez le tableau de variation de la fonction.

(a) Déterminons la dérivée de g.
g est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, quelque soit x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 2 + 0 \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

(b) Étudions le signe de g'.
g' est une fonction polynomiale de degré 2 avec : $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$.
Recherchons les racines de f'.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (1) \times (2) = 1$.
$\Delta > 0$ donc g' admet deux racines distinctes.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times (1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times (1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

g' est donc du signe de $a = 1$ sauf entre les racines 1 et 2.

(c) Nous en déduisons

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\nearrow$	$-\frac{73}{6}$	$\searrow$	$-\frac{37}{3}$	$\nearrow$	

3. Soit $h : x \mapsto -4\sqrt{x}$ une fonction définie sur $]0; +\infty[$.
Étudions les variations de h sur $]0; +\infty[$.

(a) Déterminons f'.
h est le produit d'une constante et de la fonction racine carrée donc h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, quelque soit $x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(b) Étudions le signe de h'.
Comme $x \neq 0$, $\sqrt{x}$ est strictement positif. Donc h' est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

(c) Nous en déduisons

$$\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$$

4. Soit $h : x \mapsto x^3$.
Exemple de fonction strictement croissante avec dérivée strictement positive sauf en un point.

Étude d'une fonction, allure d'une courbe.

Étudier une fonction c'est, par des procédés analytiques, trouver des informations sur l'allure de la courbe représentative. On peut considérer que l'aboutissement pour un élève est d'être capable de donner une allure précise de la courbe représentative sans faire l'usage de la calculatrice.

L'étude d'une fonction inclus, en toute rigueur et sans exhaustivité :
— recherche du domaine de définition (choix de l'axe des abscisses),
— étude de la parité et de la périodicité (réduire l'axe des abscisses),
— limites aux bornes du domaine de définition (asymptotes qui correspondent approximativement à l'allure de la courbe),
— étude de la dérivabilité (risque de piquants ou courbe arrondie),
— calcul de la fonction dérivée et étude du signe de la fonction dérivée (tangentes horizontales qui correspondent approximativement à l'allure de la courbe),
— variation de la fonction (choix de l'axe des ordonnées, courbe qui monte ou qui descend, points correspondant à des extrema),
— calcul d'images remarquables ou simples (points de la courbe),
— calcul de la dérivée seconde et étude de son signe (convexité de la courbe),
— recherche de zéros de la fonction.

L'énoncé d'un exercice peut proposer d'autres choses qu'on attend pas a priori de l'élève : position relative de deux courbes (notamment asymptotes), tangente spécifique ...

Exercices.

EXERCICE 1. Pour la fonction f dont l'expression algébrique est proposée, donnez l'allure de sa courbe représentative.

a) x.	b) x^2.	c) x^3.
d) $\sqrt{x}$.	e) $\frac{1}{x}$.	f) e^x.

g) $2x+3$. h) $-4x+1$. i) $3x+6$.
j) $2x^2-4x+5$. k) $-3x^2-12x-14$. l) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$.
m) $-\frac{2}{3}x^3+13x^2+28x-17$.

Exercice 1.

a) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 1$.
b) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 2x$.
c) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 3x^2$.
d) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
e) Fonction de référence. $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
f) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
g) Fonction affine. $f' : x \mapsto 2$.
h) Fonction affine. $f' : x \mapsto -4$.
i) Fonction affine. $f' : x \mapsto 3$.
j) Fonction polynomiale de degré deux. Possibilité d'étude des variations avec la forme canonique du trinôme.

Étudions la fonction f.

* Calculons la dérivée de f.
f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x-4.$$

* Étude du signe de f'.
f' est affine de coefficient directeur $4>0$ donc strictement croissante. De plus $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.
* Nous en déduisons

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

* Pour le tracer faire apparaître le point de coordonnées $(1;3)$ et la tangente horizontale en ce point. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0;5)$.

k) $f' : x \mapsto -6x-12$.

l) Étudions la fonction f.

* Calculons la dérivée de f. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = x^2 + x - 2.$$
* Étude du signe de f'. f' est polynomiale de degré deux et son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.
$\Delta > 0$ donc f'admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2,$$
et
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1.$$
De plus le coefficient dominant de f' est $a = 1 > 0$.
* Nous en déduisons (le trinôme es du signe de son coefficient dominant sauf entre les racines) :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	

* Pour le tracer faire apparaître les points de coordonnées $\left(-2, \frac{13}{3}\right)$ et $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$ et la tangente horizontale en ces points. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0; 1)$.

m) $f' : x \mapsto -x^2 + 26x + 28$.

EXERCICE 2. Pour la fonction f dont l'expression algébrique est proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

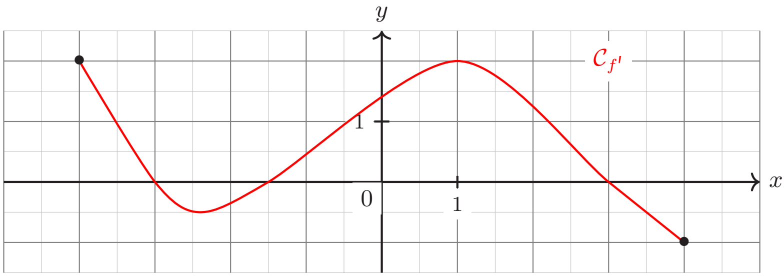
a) $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.
b) $f : x \mapsto (x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^x$.
c) $f : x \mapsto (-3x + 2)\sqrt{x}$.
d) $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)\sqrt{x}$.
e) $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$.
f) $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{3x+6}$.
g) $f : x \mapsto \frac{x^2-2}{x^2+x+1}$.
h) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
i) $f : x \mapsto \frac{-x+3}{x^7}$.
j) $f : x \mapsto \sqrt{3x+6}$.
k) $f : x \mapsto (2x+1)^7$.
l) $f : x \mapsto \frac{3}{(-2x+1)^3}$.
m) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+7}$.
n) $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{3x+6}$.

Exercice 2.

a) $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.
b) $f' : x \mapsto (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2 + 2X + 1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^x$.
c) $f' : x \mapsto -3\sqrt{x} + \frac{-3x+2}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{-9x+2}{2\sqrt{x}}$.
d) $f' : x \mapsto (2x+1)\sqrt{x} + \frac{x^2+x+1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{5x^2+3x+1}{2\sqrt{x}}$.
e) $f' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x(x^2+1)-2x\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.
f) $f' : x \mapsto \frac{-2(3x+6)-3(-2x+1)}{(3x+6)^2}$. $f'(x) = -\frac{15}{(3x+6)^2}$.
g) $f' : x \mapsto \frac{2x(x^2+x+1)-(x^2-2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-x^2+4x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+6x+2}{(x^2+x+1)^2}$.
h) $f' : x \mapsto \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.
i) $f' : x \mapsto \frac{-x^7-(-x+3)7x^6}{(x^7)^2}$. $f'(x) = \frac{6x^7-21x^6}{(x^7)^2} = \frac{x^6(6x-21)}{(x^7)^2}$.

j) $f' : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.
k) $f' : x \mapsto 2 \times 7(2x+1)^6$.
l) $f' : x \mapsto \frac{3\times(-3)\times(-2)}{(-2x+1)^4}$.
m) $f' : x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x+7}$.
n) $f' : x \mapsto 2x\mathrm{e}^{3x+6} + x^2 3\mathrm{e}^{3x+6}$. $f'(x) = x\mathrm{e}^{3x+6}(3x-2)$.

EXERCICE 3. Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous.



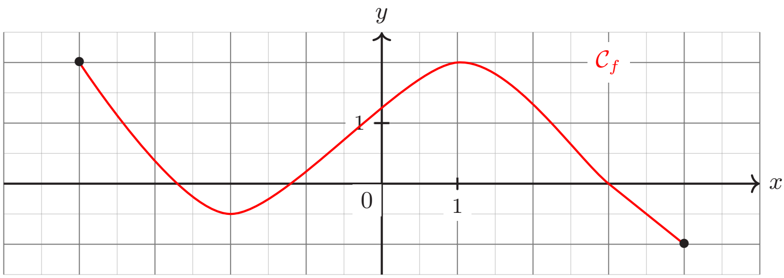
Exercice 3.

C'est la fonction dérivée, f', qui est représentée. À partir de son signe nous pourrons retrouver les variations de f d'après le théorème.

Pour se représenter les choses et justifier notre réponse, nous pouvons construire un tableau indiquant le signe de la dérivée et la variation de la fonction.

EXERCICE 4.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f qui est représentée ci-dessous.

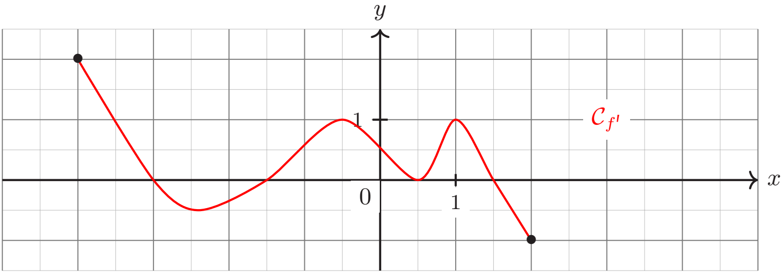


Exercice 4.

C'est la fonction f qui est représentée. À partir de ses variations nous pourrons retrouver le signe de sa fonction dérivée f' d'après le théorème.

EXERCICE 5.

La dérivée f' d'une fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de f et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.



EXERCICE 6. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthonormal.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Position relative.
   (a) Justifiez que pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
   (b) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ?
2. On note M le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.
   (a) Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
   (b) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.

EXERCICE 7. Les fonctions du baccalauréat.

a) $(x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^x$.
b) $\mathrm{e}^x \sin(x)$.
c) $x\mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$.
d) $\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
e) $(60x + 40)\mathrm{e}^{-0,5x}$.
f) $4\ln(x + 1) - \frac{x^2}{25}$.
g) $-0,05x^2 + 1,1x$.
h) $x\left(2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2\right)$.
i) $(12 + x)\mathrm{e}^{-0,6x}$.
j) $x^n\mathrm{e}^{-x}$.
k) $x\ln(x - 2)$.
l) $x\ln(x^2) - \frac{1}{x}$.
m) $2x - x^2$.

Exercice 7.

a) Notons $f : x \mapsto (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^x$.
   * $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   * $x^2 + 3x + 2 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^2$. $x^2\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Croissance comparée : $x^2\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Axe des abscisses est asymptote à la courbe en $-\infty$.
   * f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que sa courbe représentative est sans piquants.
   * $f'(x) = (2x + 3)\mathrm{e}^x + (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^x = (x^2 + 5x + 5)\mathrm{e} = \left(x - \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)\mathrm{e}^x$. f strictement croissante sur $\left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right]$ t sur $\left[\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right]$. Un sommet de coordonnées $\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, f\left(\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right)$ et l'autre $\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$. En ces sommets des tangentes horizontales.
   * $f(0) = 2$ donc la courbe passe par le point de coordonnées $(0; 2)$. $f(1) = 6\mathrm{e}$ avec $\mathrm{e} \approx 2,71$.
   * f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = (2x + 5)\mathrm{e}^x + (x^2 + 5x + 5)\mathrm{e}^x = (x^2 + 7x + 10)\mathrm{e}^x = (x - 5)(x + 2)\mathrm{e}^x$. f est concave sur $]-\infty, -2]$ et sur $[5, +\infty[$ et concave sur $[-2; 5]$. Les points de coordonnées $(-2; 0)$ et $(5; 42\mathrm{e}^5)$ sont des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
   * Nous avons déjà obtenus un zéro : -2. L'autre racine de $x^2 + 3x + 2$ est donc -1. La courbe passe par le point de coordonnées $(-1; 0)$.

b) Notons $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.

* $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. On peut limiter le domaine d'étude en utilisant le fait qu'il y a de la pseudo périodicité avec un agrandissement.
* f est du même signe que sin et s'annule en $0 + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
* $-\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^x \sin(x) \leqslant \mathrm{e}^x$. $\mathrm{e}^x \sin(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Pas de limite en $+\infty$ car $(\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right))$ diverge vers $+\infty$ et $(\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}+\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right))$ diverge vers $-\infty$.
* f dérivable sur $\mathbb{R}$.
* $f'(x) = \mathrm{e}^x \sin(x) + \mathrm{e}^x \cos(x) = \mathrm{e}^x (\sin(x) + \cos(x))$. $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\right) = 2\sin\left.\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Donc f' est positif sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ puis négatif sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7pi}{4}\right]$.

EXERCICE 8. Les fonctions du baccalauréat.

a) $\frac{0{,}96x}{0{,}93x+0{,}03}$.
b) $2x\mathrm{e}^{-x}$.
c) $\frac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
d) $10x\mathrm{e}^{-0{,}01x} + 20$.
e) $(4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.
f) $x^2 - x\ln(x)$.
g) $x - \ln(x)$.
h) $x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$.
i) $x - \ln(x^2+1)$.
j) $x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$.
k) $\frac{4}{5-x}$.
l) $x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.
m) $\mathrm{e}^x + x$.
n) $(1-x^2)\mathrm{e}^x$.
o) $8x^2(2 - 3\ln(x)) - 3$.
p) $\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$.
q) $(20x+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
r) $(x^2-4)\mathrm{e}^{-x}$.
s)