Fonctions puissances.

Nous avons défini les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ comme une itération de la multiplication. Par diverses conventions on étend cette notation au cas $n \in \mathbb{Z}_-$. Nous allons maintenant étendre cette définition au cas d'une puissance réelle en remarquant que si x^α a un sens alors $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

Définition 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ est appelée une *fonction exponentielle* et le nombre $\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ sera noté x^α.

Exemples.

1. Si $\alpha = 1$ alors on obtient la fonction identité sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Si $\alpha = 2$ alors on obtient la fonction carré sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Si $\alpha = -1$ alors on obtient la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques.

1. En étendant les puissances aux nombres réels nous perdons sur le domaine de définition. Les puissances entières sont définies sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^*$) alors que les puissances réelles ne sont définies uniquement sur les nombres strictement positifs.
2. Évidemment la notation en exposant est cohérente et coïncide avec la notation des puissances entières. La cohérence va jusqu'aux formules calculatoires comme nous allons l'établir.

Proposition 1.